凝縮数学とその応用

三神 雄太郎 *
理化学研究所，革新知能統合センター (AIP)，数理科学チーム
Yutaro Mikami
RIKEN, Center for Advanced Intelligence Project AIP, Mathematical Science Team

概要

本稿は，代数的整数論とその周辺 2025 における筆者の講演内容をまとめたものである．Clausen-Scholze によって導入された凝縮数学 (condensed mathematics) とは位相の入った代数系（位相群など）を代数的に取り扱うための枠組みであり，数論やホモトピー論などの分野で応用されている．本稿では，p 進関数解析やスキーム論，リジッド幾何への応用を念頭に置いて，凝縮数学の基礎を紹介する．なお凝縮数学が最初に導入された 2019 年頃と現在 (2026 年) では，基礎理論の展開方法が変わっている．本稿では最新の方法を主に紹介する．

記号

- 環は単位的な可換環を指すことにする．
- Set，Ring，Ab，Top で集合，環，アーベル群，位相空間のなす圏を表す．
- p は素数とする．
- $\mathbb{N}$ で非負整数の集合を表す．

1 Condensed sets

この章では (light) Condensed set を導入する．この章の参考文献としては [Sch26b, RC26] がある．

定義 1.1. (1) **Light profinite set** とは $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} S_n$（ただし S_n は有限集合に離散位相を入れた空間，また射影極限位相を考える）という形をしている位相空間のことである．$\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ で light profinite set のなす圏を表す．

(2) 圏 $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ の Grothendieck 位相を，$\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ における射の族 $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i=1}^n$ に対し，$\cup f_i(X_i) = X$ となるとき $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i=1}^n$ が被覆であるとして定める．

(3) **Condensed set** とは $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 上の層のことである．Cond(Set) で condensed set のなす圏を表す．同様に condensed ring と Cond(Ring), condensed abelian group と Cond(Ab) も定める．

* yutaro.mikami@riken.jp

注意 1.2. [Sch26b] では profinite set のなす圏 Prof 上の層として condensed set を定義していた．[Sch26b] での定義と区別する場合は，ここで定義したものを light condensed set と呼ぶ．Light profinite set に制限することで，いくつかの定義や証明が簡単になるため，最近ではこちらの定式化の方が主流になりつつある．なお非アルキメデス的な設定 (solid) では，応用上これらの定式化の間に違いはない．

例 1.3. 位相空間 X に対して，condensed set $\underline{X}$ を $\underline{X}(S) = C(S, X)$ と定める．ただし $C(S, X)$ は S から X への連続写像全体のなす集合である．これが実際に層の条件を満たすことは light profinite set の間の全射連続写像が商写像になることから従う．

例 1.4. (1) Light profinite set $\mathbb{N}_\infty$ を $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \{0, \dots, n, \infty\}$ で定める．ただし推移写像 $\{0, \dots, n+1, \infty\} \to \{0, \dots, n, \infty\}$ は，$\{0, \dots, n\}$ 上では恒等写像，$n+1, \infty \mapsto \infty$ となるように定める．$\mathbb{N}_\infty$ は集合としては $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ になる．

(2) 位相空間 X に対して，$\underline{X}(\mathbb{N}_\infty)$ は X の収束点列 $a_0, a_1, \dots, a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$ の集合になる．

上の例より，$\underline{X}$ は X の収束点列の情報を持っていることがわかる．これより X が列型（特に第一可算的）ならば $\underline{X}$ から X が復元できることが分かる．より正確には次が成立する．

命題 1.5. 関手

$$\mathrm{Top} \to \mathrm{Cond(Set)};\ X \mapsto \underline{X}$$

は左随伴関手

$$\mathrm{Cond(Set)} \to \mathrm{Top};\ T \mapsto T(*)_{\mathrm{top}}$$

を持つ．また関手 $X \mapsto \underline{X}$ は列型空間[*1]のなす部分圏に制限すると忠実充満になる．

証明. Condensed set T に対して，位相空間 $T(*)_{\mathrm{top}}$ を次で定める．

- 下部集合は $T(*)$.
- Light profinite set S と $f \in T(S), s \in S$ に対して, $f(s) \in T(*)$ を $T(S) \to T(\{s\}) = T(*)$ による f の像とする．そして $T(*)$ には，任意の S と $f \in T(S)$ に対し，$S \to T(*);\ s \mapsto f(s)$ が連続となる最強の位相を入れる．

すると，関手

$$\mathrm{Cond(Set)} \to \mathrm{Top};\ T \mapsto T(*)_{\mathrm{top}}$$

は自然に $X \mapsto \underline{X}$ の左随伴関手になる（単位射，余単位射が自然に定まる）．さらに列型空間 X に対して，余単位射 $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \to X$ が同相になることも容易に確認できる． □

この命題から次のことがわかる．

[*1] もう少し広いクラスの位相空間（距離化可能コンパクト空間で生成される位相空間）でも良い．

例 1.6. (1) 次の関手は忠実充満である．

$$\{\text{ 第一可算的な位相環 }\} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Ring});\ A \mapsto \underline{A},$$
$$\{\text{ 第一可算的な位相 abel 群 }\} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab});\ M \mapsto \underline{M}.$$

(2) 集合 S を離散位相によって位相空間とみなす．このとき関手

$$\mathrm{Set} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Set});\ S \mapsto \underline{S}$$

は忠実充満である．同様に忠実充満関手

$$\mathrm{Ring} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Ring});\ A \mapsto \underline{A},$$
$$\mathrm{Ab} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab});\ M \mapsto \underline{M}$$

を得る．さらに関手 $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ は余極限[*2]を保つ完全関手である（証明は略．直接簡単に証明できる）．

多くの論文ではこれらの忠実充満関手に基づく同一視を用いている．例えば第一可算的空間 X に対し，対応する condensed set も X と書くことが多い．本稿でも，4.2 節と付録ではこの記法を採用する．

例 1.7. $\mathbb{Z}_p$ を通常の p 進位相によって位相環とみなす．このとき $\underline{\mathbb{Z}_p} \cong \varprojlim_n \underline{\mathbb{Z}/p^n}$ となる．ただし右辺の極限は condensed abelian group としてのものである．また $\mathbb{Z}/p^n$ には離散位相を入れている．このことは右随伴関手 $\mathrm{Top} \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Set});\ X \mapsto \underline{X}$ が極限を保つことより従う．より一般に I 進完備な環 A に対し，$\underline{A} \cong \varprojlim_n \underline{A/I^n}$ となる．

例 1.8. Condensed ring A を考える．このとき $f \in A(*)$ に対して，$\varinjlim(A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{f} \cdots)$ には自然に condensed ring 構造が入る．こうして定まる condensed ring を $A[1/f]$ と書く．この記法を用いると $\underline{\mathbb{Q}_p} \cong \underline{\mathbb{Z}_p}[1/p]$ となることが容易に証明できる．

例 1.9. X を第一可算的空間, Y を距離化可能な局所コンパクト空間とする．このとき condensed set $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{Y}, \underline{X})$（ただし $\underline{\mathrm{Hom}}$ は $\mathrm{Cond}(\mathrm{Set})$ の内部 Hom）は $\underline{C(Y,X)}$ と同型である．ただし，$C(Y,X)$ は Y から X への連続写像全体のなす集合にコンパクト開位相を入れたものである．

2 Solid modules

この章では solid module を導入する．この概念は非アルキメデス的な解析，幾何を凝縮数学を用いて展開する上で最も基本的である．この章の参考文献としては [RC26]（と Clausen-Scholze による講義動画）がある．

[*2] 一般に極限は保たない．例えば $\prod_{\mathbb{N}} \underline{\mathbb{Z}}$ は $\underline{\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}}$ に積位相（これは離散位相ではない）を入れたものから定まる condensed abelian group である．

定義 2.1. Light profinite set S に対し，condensed abelian group $\mathbb{Z}[S]$ を前層 $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light,op}} \ni T \mapsto \mathbb{Z}^{\oplus \underline{S}(T)}$ の層化として定める．構成より，condensed abelian group M に対し，自然な同型 $M(S) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], M)$ が存在する．

定義 2.2. Condensed abelian group $\mathcal{N}$ を $\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty]/\mathbb{Z}[\{\infty\}]$ と定める．また連続写像 $\mathbb{N}_\infty \to \mathbb{N}_\infty;\ n \mapsto n+1$（ただし $\infty + 1 = \infty$ とする）は $\sigma\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を誘導する．

例 2.3. 第一可算的な位相 abel 群 M に対し， $\mathrm{Hom}(\mathcal{N}, \underline{M})$ は M の 0 に収束する数列 (null sequence) の集合とみなせる．またこの同一視のもと，$\sigma^*\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{N}, \underline{M}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{N}, \underline{M})$ は $(a_n)_n \mapsto (a_{n+1})_n$ という射に対応する．

補題 2.4. 関手 $\mathrm{Cond(Ab)} \to \mathrm{Cond(Ab)};\ M \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)$ は完全かつ（有限とは限らない）直和を保つ[*3]．ただし，$\underline{\mathrm{Hom}}(-,-)$ は condensed abelian group の内部 Hom である．

証明. まず $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M) \cong \mathrm{Ker}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty], M) \to M)$ である．ここで関手 $M \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty], M)$（と $M \mapsto M$）は直和を保つので，$M \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)$ も直和を保つ．関手 $M \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)$ の完全性は非自明である．付録の定理 A.22 を見よ． □

注意 2.5. 関手 $\mathrm{Cond(Ab)} \to \mathrm{Ab};\ M \mapsto M(*)$ は完全かつ直和を保つ．よって内部射影的ならば射影的，内部コンパクトならばコンパクトとなる．

以上の準備のもと solid module の定義を与える．

定義 2.6. (1) Condensed abelian group M が solid であるとは，射

$$\mathrm{id} - \sigma^*\colon \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)$$

が同型になることである．$\mathrm{Solid} \subset \mathrm{Cond(Ab)}$ で solid module (solid condensed abelian group のこと) のなす充満部分圏を表す．

(2) $\mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ で $\mathrm{Cond(Ab)}$ から定まる導来(無限)圏を表す．このとき $C \in \mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ が solid であるとは射

$$\mathrm{id} - \sigma^*\colon R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M) \to R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)$$

が同型になることである．$\mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})^{\square} \subset \mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ で solid なものたちのなす充満部分圏を表す[*4]．

例 2.7. 第一可算的な位相 abel 群 M に対し，例 2.3 の同一視のもと，

$$\mathrm{id} - \sigma^*\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{N}, M) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{N}, M)$$

[*3] このことを「$\mathcal{N}$ は内部射影的 (internally projective) かつ内部コンパクト（internally compact）である」という．特に $\mathcal{N}$ は導来無限圏 $\mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ においても内部コンパクト（$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, -)$ が filtered colimit を保つ）である．

[*4] [Sch26b] などでは solid を表す記号として ■ が使われていた．しかし [Man22] 以降，徐々に □ を使う文献が増えてきた．□ が増えてきた理由としては視認性の良さが挙げられる．

は $(a_n)_n \mapsto (a_n - a_{n+1})_n$ と対応する．よって形式的には，この射の逆射は

$$(b_n)_n \mapsto (\sum_{i=n}^{\infty} b_i)_n$$

で与えられる．つまり，雑にいうと，solid という条件は「0 に収束する数列の無限和が取れる」という意味である．

注意 2.8. 上の例からわかる通り実数体 $\mathbb{R}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ から定まる $\underline{\mathbb{R}}$ や $\underline{\mathbb{C}}$ は solid ではない（命題 2.15 も見よ）．それゆえ，$\mathbb{R}$（もしくは $\mathbb{C}$）上の幾何や解析を凝縮数学を用いて行うためには，solid では不十分である．これらを扱うための枠組みとしては，gaseous や liquid と呼ばれるものが存在する．Gaseous は，大雑把に言えば，「任意の null sequence $(a_n)_n$ と 1 未満の r（これは $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{R}$ のようなノルム環では意味をもつ）に対し無限和 $\sum_{i=0}^{\infty} a_n r^n$ が取れる」という条件である．詳しくは [Ara25] を見よ．Liquid は，大雑把に言えば，L^p ノルムに関する完備性についての条件であるが，筆者の力不足により解説をすることができない．詳しくは [Sch26a] を見よ．

定理 2.9. 圏 Solid は次のような性質を持つ．

(1) Solid は Grothendieck abel 圏である．また Solid $\subset$ Cond(Ab) は極限，余極限，拡大について閉じている充満部分圏である．
(2) 包含関手 Solid $\hookrightarrow$ Cond(Ab) は左随伴関手 Cond(Ab) $\to$ Solid; $M \mapsto M^{\square}$ を持つ．
(3) Condensed abelian group L と solid module M に対し，$\underline{\mathrm{Hom}}(L, M)$ は solid である．
(4) 関手 $(-)^{\square}$: Cond(Ab) $\to$ Solid が対称モノイダルになるような Solid の対称モノイダル構造がただ一つ存在する．これによるテンソル積を $- \otimes^{\square} -$ と書く．

同様に（無限）圏 $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ は次の性質を満たす．

(1') $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ は表現可能無限圏 (presentable ∞-category) である．また $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square} \subset \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ は極限，余極限について閉じている充満部分圏である．
(2') 包含関手 $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ は左随伴関手 $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})) \to \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$; $M \mapsto M^{\mathbb{L}\square}$ を持つ．
(3') $L \in \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ と $M \in \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ に対し，$R\underline{\mathrm{Hom}}(L, M)$ は solid である．
(4') 関手 $(-)^{\mathbb{L}\square}$: $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})) \to \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ が対称モノイダルになるような $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ の対称モノイダル構造がただ一つ存在する．これによるテンソル積を $- \otimes^{\mathbb{L}\square} -$ と書く．

さらに Solid と $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ の間には次のような関係[*5]がある．

(a) $M \in \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ が solid であることの必要十分条件は，任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $H^i(M) \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ が solid になることである．

[*5] (b) については理論展開上示す必要はないが言及しておく．

(b) $\mathcal{D}(\mathrm{Solid})$ を Solid から定まる導来無限圏とする．このとき包含関手 $\mathrm{Solid} \to \mathrm{Cond(Ab)}$ から誘導される関手 $\mathcal{D}(\mathrm{Solid}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ は圏同値 $\mathcal{D}(\mathrm{Solid}) \to \mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})^{\square}$ を誘導する．さらにこの圏同値のもと，$(-)^{\mathbb{L}\square}$，$- \otimes^{\mathbb{L}\square} -$ は $(-)^{\square}$，$- \otimes^{\square} -$ の左導来関手になる．

証明. (1) から (4)，(1') から (4')，(a) は補題 2.4 と（無限）圏に関する形式的な議論より従う．(b) については後述する定理 2.16，系 2.20 と導来無限圏に関する形式的な議論から従う． □

注意 2.10. [Sch26b] における技術的に最も困難な部分はこの定理の証明だったが，light profinite set に基づく定式化ではこの定理の証明はそこまで困難ではない．代わりに light profinite set S に対して，$\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}$ を計算する部分（定理 2.16）が困難になっている．[Sch26b] では $\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}$ の表示を出発地点として solid を定義しているため，この計算は必要ない．

注意 2.11. Solid module L，M に対し，$L \otimes^{\square} M \cong (L \otimes M)^{\square}$ となる．ただし，右辺の $L \otimes M$ は condensed abelian group としてのテンソル積である．

では solid module の例を挙げよう．

命題 2.12. M を abel 群とする．このとき Condensed abelian group $\underline{M}$（M には離散位相を入れる）は solid である．特に $\underline{\mathbb{Z}}$ は solid である．

証明. 例 1.9 より，

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, \underline{M}) &\cong \mathrm{Ker}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty], \underline{M}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[\{\infty\}], \underline{M})) \\ &\cong \mathrm{Ker}(\underline{C(\mathbb{N}_\infty, M)} \to \underline{C(\{\infty\}, M)})\end{aligned}$$

となる．ここで $C(\mathbb{N}_\infty, M)$ に定まるコンパクト開位相は離散位相になる．また通常の abel 群として $\mathrm{Ker}(C(\mathbb{N}_\infty, M) \to C(\{\infty\}, M)) \cong \bigoplus_{\mathbb{N}} M;\ f \mapsto (f(n))_n$ となる．以上より，

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, \underline{M}) \cong \underline{\bigoplus_{\mathbb{N}} M}$$

を得る．この表記を使うことで，$\mathrm{id} - \sigma^* \colon R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, \underline{M}) \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, \underline{M})$ が同型になることが直ちにわかる． □

系 2.13. $\underline{\mathbb{Z}_p}$，$\underline{\mathbb{Q}_p}$ は solid である[*6]．

証明. 例 1.7 より

$$\underline{\mathbb{Z}_p} \cong \varprojlim_n \underline{\mathbb{Z}/p^n}$$

となる．ここで命題 2.12 より，右辺は solid module の極限になる．よって定理 2.9 (1) より $\underline{\mathbb{Z}_p}$ も solid である．次に例 1.8 より，（condensed abelian group として）

$$\underline{\mathbb{Q}_p} \cong \varinjlim(\underline{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{p} \underline{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{p} \cdots)$$

[*6] もちろん $\mathbb{Z}_p$，$\mathbb{Q}_p$ の位相は p 進位相である．

となる．右辺は solid module の余極限なので，左辺の $\underline{\mathbb{Q}_p}$ も定理 2.9 (1) より solid になる． □

注意 2.14. このように与えられた condensed abelian group が solid であることを示すには，離散 abel 群から定まる condensed abelian group の極限，余極限（と拡大）で記述することが定石である．実は，$\underline{\mathbb{Z}}$ を含み，極限，余極限，拡大で閉じている Cond(Ab) の最小の部分圏は Solid であることが知られている．このことは系 2.19 より従う．

次の命題も重要である．

命題 2.15. 実数体 $\mathbb{R}$[*7]から定まる condensed abelian group $\underline{\mathbb{R}}$ は solid ではない．より強く，$\underline{\mathbb{R}}^{\mathbb{L}\square} = 0$ となる．さらに，任意の $C \in \mathcal{D}(\underline{\mathbb{R}})$ に対し，$C^{\mathbb{L}\square} = 0$ となる．ただし忘却関手 $\mathcal{D}(\underline{\mathbb{R}}) \to \mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ によって $C \in \mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ と見ている．

証明. まず $\underline{\mathbb{R}}^{\square} = 0$ を示す．定理 2.9 (4) から $\underline{\mathbb{R}}^{\square}$ は condensed ring になる．よって $\underline{\mathbb{R}}^{\square}(*)$ において $1 = 0$ を言えば良い．まず 0 に収束する数列 $1, 1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, \dots$ から $f\colon \mathcal{N} \to \underline{\mathbb{R}}$ を得る．ここで $\underline{\mathbb{R}}^{\square}$ は solid なので，solid の定義より次の図式を可換にする $g\colon \mathcal{N} \to \underline{\mathbb{R}}^{\square}$ がただ一つ存在する：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{f} & \underline{\mathbb{R}} \\ {\scriptstyle 1-\sigma^*}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{g} & \underline{\mathbb{R}}^{\square}. \end{array}$$

さて $i = 1, 2$ に対し，$F_i\colon \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{N}_\infty;\ n \mapsto 2n + i$ とおく．これは $F_i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を誘導する．$F = F_1 + F_2\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ とおく．このとき次の図式は可換になる：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{F} & \mathcal{N} & \xrightarrow{f} & \underline{\mathbb{R}} \\ {\scriptstyle 1-\sigma^*}\downarrow & & {\scriptstyle 1-\sigma^*}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{N} & \xrightarrow{g} & \underline{\mathbb{R}}^{\square}. \end{array}$$

ここで $f \circ F = f$ である．よって g の一意性から $g = g \circ F_1$ を得る．さて g に対応して $\underline{\mathbb{R}}^{\square}(*)$ の元の列 $x_0, x_1, \dots$ を得る，ここで $g = g \circ F_1$ より，$x_n = x_{2n+1}$ となる．特に $x_0 = x_1$ である．一方で $g \circ (1 - \sigma^*)$ は $x_0 - x_1, x_1 - x_2, \dots$ という数列に対応する．g の構成より，これは数列 $1, 1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, \dots$ の $\mathbb{R} = \underline{\mathbb{R}}(*) \to \underline{\mathbb{R}}^{\square}(*)$ による像である．よって $\underline{\mathbb{R}}^{\square}(*)$ において $1 = x_0 - x_1 = 0$ となる．

残りの部分を証明しよう．まず $M \in \mathcal{D}(\underline{\mathbb{R}})$ をとる．このとき定理 2.9 (4')，(a) より，任意の整数 i に対し，$H^i(M^{\mathbb{L}\square})$ は solid $\underline{\mathbb{R}}$-module になる．よってこれは $\underline{\mathbb{R}}^{\square}$-module になる．ここで $\underline{\mathbb{R}}^{\square} = 0$ より，$H^i(M^{\mathbb{L}\square}) = 0$ を得る．以上より $M^{\mathbb{L}\square} = 0$ を得る．特に $M = \underline{\mathbb{R}}$ とすると，$\underline{\mathbb{R}}^{\mathbb{L}\square} = 0$ を得る． □

[*7] もちろん $\mathbb{R}$ の位相は Euclid 位相である．

本稿で紹介する中では，次の定理の証明が最も複雑である.. 証明は付録にて与える．Light profinite set S に対し，$\mathbb{Z}_{\square}[S] \coloneqq \mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square} \in \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ と定める．命題 2.12 より，S が有限集合ならば $\mathbb{Z}_{\square}[S] = \mathbb{Z}[S]$ となることに注意する．

定理 2.16. $S = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} S_n$ を light profinite set とする（各 S_n は有限集合）．このとき, $\mathbb{Z}_{\square}[S] \in \mathrm{Solid}$（つまり 0 次以外のコホモロジーは 0 になる）であり，さらに自然な射 $\mathbb{Z}_{\square}[S] \to \varprojlim_{n} \mathbb{Z}[S_n]$ は同型になる．また S の位数が無限の場合，同型 $\mathbb{Z}_{\square}[S] \cong \mathcal{N}^{\mathbb{L}\square} \cong \prod_{\mathbb{N}} \underline{\mathbb{Z}}$ が存在する（一つ目は非標準的な同型，二つ目は自然な同型である）.

注意 2.17. $\mathcal{N}$ には $\mathbb{N}_\infty \times \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{N}_\infty$; $(n, m) \mapsto n + m$ から定まる環構造が入る．すると $\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}$ も condensed ring になる．このとき condensed ring としての同型 $\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square} \cong \underline{\mathbb{Z}[[q]]}$ が存在する（ただし $\mathbb{Z}[[q]]$ には q 進位相を入れる）．またこの同型のもと，$\sigma\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ から定まるものは q 倍と対応する.

系 2.18. Light profinite set S に対し，$\mathbb{Z}_{\square}[S]$ は Solid において内部射影的かつ内部コンパクトである．また $\mathbb{Z}_{\square}[S]$ は $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ においても内部コンパクトである.

証明. S が有限集合の場合は良い．そうでない場合は，同型 $\mathbb{Z}_{\square}[S] \cong \mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}$ が存在する．よって補題 2.4 から従う． □

系 2.19. $\prod_{\mathbb{N}} \underline{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ のコンパクト生成子 (compact generator) になる．特に $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^{\square}$ はコンパクト生成無限圏 (compactly generated ∞-category) になる.

証明. 定理 2.16 から形式的に従う． □

系 2.20. I, J を高々可算な集合とする．このとき自然な射

$$\prod_{I} \underline{\mathbb{Z}} \otimes^{\mathbb{L}\square} \prod_{J} \underline{\mathbb{Z}} \to \prod_{I\times J} \underline{\mathbb{Z}}$$

は同型である.

証明. まず $\prod_{I} \underline{\mathbb{Z}} \otimes^{\mathbb{L}\square} \prod_{J} \underline{\mathbb{Z}}$ が高々可算個の $\underline{\mathbb{Z}}$ の直積であることを示す．I か J が有限集合ならば良い．$I = J = \mathbb{N}$ とする．このとき左辺は位数無限の light profinite set S を用いて $\mathbb{Z}_{\square}[S] \otimes^{\mathbb{L}\square} \mathbb{Z}_{\square}[S]$ と書ける．ここで $\mathbb{Z}[S] \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}[S] \cong \mathbb{Z}[S \times S]$ と定理 2.9 (4') より，$\mathbb{Z}_{\square}[S] \otimes^{\mathbb{L}\square} \mathbb{Z}_{\square}[S] \cong \mathbb{Z}_{\square}[S\times S]$ を得る．よって定理 2.16 と合わせて, 非標準的な同型 $\prod_{\mathbb{N}} \underline{\mathbb{Z}} \otimes^{\mathbb{L}\square} \prod_{\mathbb{N}} \underline{\mathbb{Z}} \simeq \prod_{\mathbb{N}} \underline{\mathbb{Z}}$ を得る.

さて付録の系 A.32[*8] より，標準的な同型

$$\prod_I \underline{\mathbb{Z}} \otimes \prod_J \underline{\mathbb{Z}} \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_I \underline{\mathbb{Z}} \otimes \prod_J \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Z}}), \underline{\mathbb{Z}}) \tag{2.1}$$

を得る．ここで $\prod_I \underline{\mathbb{Z}}$ が内部コンパクトなことと系 A.32 より，同型

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_I \underline{\mathbb{Z}} \otimes \prod_J \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Z}}) &\cong \underline{\mathrm{Hom}}(\prod_I \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathrm{Hom}}(\prod_J \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Z}})) \\
&\cong \underline{\mathrm{Hom}}(\prod_I \underline{\mathbb{Z}}, \bigoplus_J \underline{\mathbb{Z}}) \\
&\cong \bigoplus_J \underline{\mathrm{Hom}}(\prod_I \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Z}}) \\
&\cong \bigoplus_J \bigoplus_I \underline{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

を得る．これを (2.1) に代入して標準的な同型

$$\prod_I \underline{\mathbb{Z}} \otimes \prod_J \underline{\mathbb{Z}} \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\bigoplus_J \bigoplus_I \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \prod_{I \times J} \underline{\mathbb{Z}}$$

を得る．この同型が定理中で与えた射と一致することは容易に確かめられる． □

3 p 進関数解析

この章では凝縮数学を用いた p 進関数解析について簡単に紹介する．この章の参考文献としては [RJRC22] と [Bos23a] がある．また古典的な p 進関数解析に関しては [Sch02, ST02, Eme17] などがある．

定義 3.1. Solid $\mathbb{Q}_p$-module[*9] とは，(condensed) $\underline{\mathbb{Q}_p}$-module であって condensed abelian group として solid なもののことを言う．$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}_p}^{\square}$ で solid $\mathbb{Q}_p$-module のなす圏を表す．また $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)^{\square} \subset \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Q}_p})$ を，$\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ の対象として solid になっているもののなす充満部分圏[*10] として定義する．

注意 3.2. $\underline{\mathbb{Q}_p}$ は対称モノイダル abel 圏 Solid の環対象になる．また solid $\mathbb{Q}_p$-module は Solid における $\underline{\mathbb{Q}_p}$-module のことである．特に solid $\mathbb{Q}_p$-module M, N に対し，Solid の対称モノイダル構造からテンソル積 $M \otimes_{\mathbb{Q}_p}^{\square} N$ が定まる．同様に $M, N \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)^{\square}$ に対し，$M \otimes_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{L}\square} N$ が定まる．

命題 3.3. M を Fréchet $\mathbb{Q}_p$ 空間とする．このとき $\underline{M}$ は solid である．

証明. M は Banach $\mathbb{Q}_p$ 空間の極限 $M \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M_n$ として書くことができる．ここで $\underline{M} \cong \varprojlim_n \underline{M_n}$ より，M が Banach の場合に帰着される．この場合は系 2.13 と同様に証明できる． □

[*8] 付録では下部線を省略していることに注意せよ

[*9] Solid とついていることで，この $\mathbb{Q}_p$ は condensed ring だと思っていることが明確にわかる．それゆえ下部線 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ を省略している．

[*10] $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)^{\square}$ が $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}_p}^{\square}$ の導来無限圏と一致することを証明することはできるが，ここでは省略する．

命題 3.4. 関手 {Fréchet $\mathbb{Q}_p$ 空間 } $\to \mathrm{Mod}^{\square}_{\mathbb{Q}_p}$; $V \mapsto \underline{V}$ は忠実充満である．さらに Fréchet $\mathbb{Q}_p$ 空間 V，W に対し，

$$\underline{V \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}} W} \cong \underline{V} \otimes^{\square}_{\mathbb{Q}_p} \underline{W} \cong \underline{V} \otimes^{\mathbb{L}\square}_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}$$

となる[*11]．

証明. 前半の主張は命題 3.3 と命題 1.5 から直ちに従う．テンソル積についての証明は省略する．[RJRC22, Lemma 3.28][*12]，もしくは [Bos23a, Proposition A.68] を見よ．なお $\underline{V} \otimes {\mathbb{Q}_p}^{\square} \underline{W} \cong \underline{V} \otimes {\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{L}\square} \underline{W}$ については，V，W が平坦 (flat) なことから従う（[RJRC22, Lemma 3.21]，もしくは [Bos23a, Corollary A.65]）． □

p 進関数解析においては次の概念が重要である．

定義 3.5. 局所凸 $\mathbb{Q}_p$ 空間 V がコンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間であるとは，$V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$ となる Banach $\mathbb{Q}_p$ 空間 V_n とコンパクト連続単射 $\mathbb{Q}_p$ 線形写像 $V_n \to V_{n+1}$ が存在することをいう．ただし余極限は局所凸 $\mathbb{Q}_p$ 空間のなす圏の中で考える．

例 3.6.
- $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}_p$ はコンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間である．
- G をコンパクト p 進 Lie 群とする．このとき G 上の局所解析的関数のなす線型空間 $C^{\mathrm{la}}(G, \mathbb{Q}_p)$ はコンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間である．

局所凸 $\mathbb{Q}_p$ 線型空間 V に対し，V_b' で V の双対に強位相を入れたものを表す．このときコンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間と核型 Fréchet $\mathbb{Q}_p$ 空間[*13]の間には次のような関係がある．

定理 3.7 ([ST02, Corollary 1.4])**.** 双対関手 $V \mapsto V_b'$ はコンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間の圏と核型 Fréchet $\mathbb{Q}_p$ 空間の圏の間の反変圏同値を誘導する．

さて V をコンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間とする．このとき自然に評価写像 $V_b' \times V \to \mathbb{Q}_p$ が定まるが，残念ながらこれは一般には連続にはならず，成分ごとに連続までしか成立しない．このようなことが原因で，古典的な p 進解析ではテンソル積と Hom の随伴を扱う際には，技術的な部分に細心の注意を払う必要があった．この問題は，コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間の定義に現れる余極限 $V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$ を局所凸 $\mathbb{Q}_p$ 空間の圏でとっていたことに起因する．そこで，コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間の凝縮数学版を定義する．

定義 3.8. Solid $\mathbb{Q}_p$-module が V が solid コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間であるとは，$V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \underline{V_n}$ となる Banach $\mathbb{Q}_p$ 空間 V_n とコンパクト連続単射 $\mathbb{Q}_p$ 線形写像 $V_n \to V_{n+1}$ が存在することをいう．た

[*11] V，W は Fréchet なので，$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W$ の帰納テンソル積位相と射影テンソル積位相が一致する．これについての完備化を $V \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}} W$ と書いている．

[*12] ここでの証明には，順序集合の間の射の共終性 (cofinality) に関する議論の部分にギャップがある．しかし（非自明な）組合せ論的議論をすることで修正できる．

[*13] 定義は省略する．[Sch02, §19] などを見よ．なお凝縮数学にも核型 (nuclear) という概念があるが，古典的な p 進関数解析に出てくる概念とは異なる（[RJRC22, Remark 3.15]）．

だし余極限は $\mathrm{Mod}^{\square}_{\mathbb{Q}_p}$ の中で考える．

それでは，この二つの概念を比較する．まずコンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間 $V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$ に対して，$\underline{V} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \underline{V_n}$ となる．これは [Sch02, §16] での議論から従う（[RJRC22, Lemma 3.36] にも関連することが書かれている）．今まで現れた例との最大の違いは V が第一可算的ではないことである（より強くコンパクト生成でもない）．それゆえ，命題 1.5 のように，$\underline{V}$ から V を（直接）復元することはできない．ある意味では，V から $\underline{V}$ に移ることで，余計な情報を捨てていると考えることができる．そしてこのおかげで次が成立する．

命題 3.9. コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間 V に対して，solid $\mathbb{Q}_p$-module の双線型写像 $\mathrm{ev}\colon \underline{V_b'} \times \underline{V} \to \underline{\mathbb{Q}_p}$ が自然に定まる．

証明. $V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$ と表す．このとき $V_b' \times V_n \to \mathbb{Q}_p$ は連続であり，これから双線型写像 $\mathrm{ev}_n\colon \underline{V_b'} \times \underline{V_n} \to \underline{\mathbb{Q}_p}$ が定まる．ここで層の一般論より，Cond(Set) では filtered colimit は有限直積と可換である．よって ev_n の余極限をとって $\mathrm{ev}\colon \underline{V_b'} \times \underline{V} \to \underline{\mathbb{Q}_p}$ を得る． □

「V から $\underline{V}$ に移ることで，余計な情報を捨てている」と述べたが，次の定理により本質的な情報は捨てていないことがわかる．

定理 3.10. (1) 核型 Fréchet $\mathbb{Q}_p$ 空間 V に対し，自然な同型 $\underline{V_b'} \cong \underline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}}(\underline{V}, \underline{\mathbb{Q}_p})$ が存在する．
(2) コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間 V に対し，自然な同型 $\underline{V_b'} \cong \underline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}}(\underline{V}, \underline{\mathbb{Q}_p})$ が存在する．
(3) 関手 $\{$ コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間 $\} \to \{$solid コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間 $\}$; $V \mapsto \underline{V}$ は圏同値を与える．

証明. (1)，(2) は [RJRC22, Theorem 3.40] での記述から従う．(3) を示す．(2) と命題 3.4 の証明より，コンパクト型 $\mathbb{Q}_p$ 空間 V に対して $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{V}, \underline{\mathbb{Q}_p})(*)_{\mathrm{top}} \cong \underline{V_b'}(*)_{\mathrm{top}} \cong V_b'$ となる．よって $W \mapsto (\underline{\mathrm{Hom}}(W, \underline{\mathbb{Q}_p})(*)_{\mathrm{top}})_b'$ が $V \mapsto \underline{V}$ の準逆関手を与えことが分かる． □

この定理により，凝縮数学を用いた定式化では，双対が対称モノイダル閉圏の一般論で扱えることがわかる．同様にテンソル積と Hom の随伴も対称モノイダル閉圏の一般論で扱えるようになり，古典的な p 進関数解析と比べて形式的な議論で処理できる部分が増える．

最後に応用例をいくつか挙げる．

例 3.11. (1) [RJRC22, RJRC26] にて，局所解析的表現の理論の solid 版が導入された．これにより，局所解析的表現の導来圏を適切に定義できるようになり，コホモロジーなどが調べやすくなった．
(2)（ある種の）Abel 曲面の modularity を証明した論文 [BCGP25] において，p 進 Eichler-Shimura 理論を展開するために凝縮数学が用いられた．
(3) [CN25] にて，p 進プロエタールコホモロジーの係数理論の研究に凝縮数学が用いられた．
(4) [Bos23b] にて，リジッド解析空間の有理的 p 進コホモロジー（p 進プロエタールコホモロジーや Hyodo-Kato コホモロジーなど）の研究に凝縮数学が用いられた．

4 解析環と Serre 双対

この章では凝縮数学の文脈で，どのように解析幾何（代数幾何やリジッド幾何など）が展開されるかを紹介する．この章の参考文献としては [Sch26b, Sch26a, And21, RC26] がある．

4.1 解析環

初めに condensed animated ring を導入する[*14]．今後の具体例においては，condensed animated ring を condensed ring に読み替えても影響はないため，無限圏論に慣れていない読者は以下の定義は無視しても問題ない．

定義 4.1. Animated ring のなす無限圏を AniRing と書く．Condensed animated ring とは $\mathrm{Prof}^{\mathrm{light}}$ 上 AniRing に値をもつ hypersheaf のことである．Condensed animated ring のなす無限圏を Cond(AniRing) と書く．Condensed animated ring A は $\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ の (connective) $\mathbb{E}_\infty$-algebra object とみなせるので，$\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ における A-module object のなす無限圏として $\mathcal{D}(A)$ が定まる．

定義 4.2. (1) 解析環 (Analytic ring) とは condensed animated ring $A^\triangleright$ と充満部分圏 $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright)$ の組 $A = (A^\triangleright, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright))$ であって次の条件[*15]を満たすもののことをいう．

(a) $A^\triangleright \in \mathcal{D}(A)$ である．

(b) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright)$ は極限，余極限について閉じている．

(c) 任意の $C \in \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ と $M \in \mathcal{D}(A)$ に対して，$R\underline{\mathrm{Hom}}(C, M) \in \mathcal{D}(A^\triangleright)$ は $\mathcal{D}(A)$ に含まれる．

(d) 包含関手 $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^\triangleright)$ は左随伴関手 $A \otimes^{\mathbb{L}}_{A^\triangleright} -$ を持つ．さらに

$$\mathcal{D}(A^\triangleright) \xrightarrow{A \otimes^{\mathbb{L}}_{A^\triangleright} -} \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright)$$

は right t-exact である．

解析環 $A = (A^\triangleright, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright))$ に対し，$M \in \mathcal{D}(A^\triangleright)$ が A 完備であるとは，$M \in \mathcal{D}(A)$ となることをいう．

(2) $A = (A^\triangleright, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright))$ と $B = (B^\triangleright, \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B^\triangleright))$ を解析環とする．このとき解析環の射 $f\colon A \to B$ とは，condensed animated ring の射 $f\colon A^\triangleright \to B^\triangleright$ であって任意の $M \in \mathcal{D}(B)$ に対して M が A 完備（f によって $M \in \mathcal{D}(A^\triangleright)$ とみなす）になるもののことである．解析環のなす無限圏を AnRing[*16] と書く．

記号 4.3. (1) 解析環 $A = (A^\triangleright, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright))$ と light profinite set S に対し，

$$A^\triangleright[S] = A^\triangleright \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}[S], \quad A[S] = A \otimes^{\mathbb{L}}_{A^\triangleright} A^\triangleright[S]$$

[*14] Six functor formalism における基底変換定理 (proper base change theorem) などを記述するには condensed animated ring まで考える方が便利である（平坦性などを課す必要がなくなる）．

[*15] [Sch26a] では Frobenius 射に関する条件もついていたが，light profinite set のみを考えることでその条件は自動的に成立するようになった（[RC26, Theorem 4.3.2]）．

[*16] AnRing と AniRing は見分けにくいので注意がいる．なお animated ring のなす無限圏を Ring と書く文献もある（通常の環のなす圏は $\mathrm{Ring}^\heartsuit$ と書く）．こうすると AnRing と見分けやすくなる．

と定める．ただし $A^\triangleright \otimes^{\mathbb{L}} -$ は condensed ring の射 $\underline{\mathbb{Z}} \to A^\triangleright$ に沿った係数拡大である．

(2) 解析環の射 $f\colon A = (A^\triangleright, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright)) \to B = (B^\triangleright, \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B^\triangleright))$ に対し，忘却関手 $f_*\colon \mathcal{D}(B) \to \mathcal{D}(A)$ は左随伴関手を持つ．これを $B \otimes^{\mathbb{L}}_A -$ と書く．

例 4.4. (1) Condensed animated ring A に対し，$(A, \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A))$ は解析環になる．この解析環を A^{cond} と書く．

(2) $(\underline{\mathbb{Z}}, \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^\square \subset \mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})) = \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}}))$ は解析環になる（定理 2.9 と命題 2.12）．この解析環を $\mathbb{Z}_\square$ と書く．この記号に基づき，$\mathcal{D}(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))^\square$ のことを $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_\square)$ と書くことも多い．

(3) $A = (A^\triangleright, \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\triangleright))$ を解析環，$B^\triangleright$ を condensed animated A-algebra（condensed animated $A^\triangleright$-algebra であって A 完備なもの）とする．このとき充満部分圏 $\mathcal{D}(B^\triangleright_{A/}) \subset \mathcal{D}(B^\triangleright)$ を $C \in \mathcal{D}(B^\triangleright)$ に対し $C \in \mathcal{D}(B^\triangleright_{A/}) \iff C$ は A 完備 で定める．このとき $B^\triangleright_{A/} = (B^\triangleright, \mathcal{D}(B^\triangleright_{A/}) \subset \mathcal{D}(B^\triangleright))$ は解析環になる．この $B^\triangleright$ 上の解析環構造のことを A から誘導された解析環構造という．

(4) $\underline{\mathbb{Q}_p}$ に $\mathbb{Z}_\square$ から誘導される解析環構造を入れたものを $\mathbb{Q}_{p,\square}$ と書く．このとき 3 章で考えていた $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)^\square$ は $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_{p,\square})$ と一致する．

定理 4.5. 解析環のなす無限圏 AnRing は余極限を持つ．特に解析環の射 $A \to B, A \to C$ に対して，押し出し (pushout) として $B \otimes^{\mathbb{L}}_A C$ が定まる．

$\mathbb{Z}[T]$ を多項式環（に離散位相を入れたもの）として，$\underline{\mathbb{Z}[T]}$ を考える．この上の解析環構造を定めたい．$\mathcal{N}[T] = \mathcal{N} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \underline{\mathbb{Z}[T]}$ と定める．

定義 4.6. $M \in \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}[T]})$ が $\mathbb{Z}[T]_\square$ 完備であるとは，射

$$\mathrm{id} - T\sigma^*\colon R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}[T]}}(\mathcal{N}[T], M) \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}[T]}}(\mathcal{N}[T], M)$$

が同型になることである．$\mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square) \subset \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}[T]})$ で $\mathbb{Z}[T]_\square$ 完備な対象のなす充満部分圏を表す．

注意 4.7. 注意 2.7 と同様に考えると，$\mathbb{Z}[T]_\square$ 完備であるとは，大雑把に言えば，null sequence (a_n) に対し無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ が存在するという意味になる．例えば $\underline{\mathbb{Q}\langle T\rangle}$ は $\mathbb{Z}[T]_\square$ 完備だが，$\underline{\mathbb{Q}\langle pT\rangle}$ は $\mathbb{Z}[T]_\square$ 完備ではない．証明は省略する．

定理 4.8. $(\underline{\mathbb{Z}[T]}, \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square) \subset \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}[T]}))$ は解析環になる．この解析環を $\mathbb{Z}[T]_\square$ と書く．

証明. $\mathbb{Z}_\square$ が解析環になることの証明と同様にできる． □

解析環 $\mathbb{Z}[T]_\square$ を用いることで様々な解析環を定義できる．

定義 4.9. A を condensed animated ring, $A^+ \subset \pi_0(A)(*)$ を部分集合とする[*17]．このとき $M \in \mathcal{D}(A)$ が $(A, A^+)_\square$ 完備であるとは次の条件を満たすことをいう：任意の $f \in A^+$ に対し，

[*17] 基本的には A^+ は環であることが多いが，定義の上では環であることは必要はない．

condensed animated ring の射 $\underline{\mathbb{Z}[T]} \to A;\ T \mapsto f$ によって M を $\mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}[T]})$ の対象とみなすと M は $\mathbb{Z}[T]_\square$ 完備になる[*18]．$\mathcal{D}((A, A^+)_\square) \subset \mathcal{D}(A)$ で $(A, A^+)_\square$ 完備な対象のなす充満部分圏を表す．すると $(A, A^+)_\square = (A, \mathcal{D}((A, A^+)_\square) \subset \mathcal{D}(A))$ は解析環になる．

注意 4.10. 注意 2.7 と同様に考えると，$(A, A^+)_\square$ 完備であるとは，大雑把に言えば，null sequence (a_n) と $f \in A^+$ に対し無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i f^i$ が存在するという意味になる．

注意 4.11. $(\underline{\mathbb{Z}[T]}, \mathbb{Z}[T])_\square$ と $\mathbb{Z}[T]_\square$ は一致する．つまり $M \in \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}[T]})$ に対し，M が $\mathbb{Z}[T]_\square$ 完備なことと，任意の $f \in \mathbb{Z}[T]$ に対し M が $\mathbb{Z}[f]_\square$ 完備なことが同値である．

注意 4.12. 環 A に対し，解析環 $(\underline{A}, A)_\square$ は単に $A_\square$ と書かれることが多い．本稿でもこの記法を採用する．

例 4.13. (A, A^+) を完備な affinoid 対[*19]とする．このとき解析環 $(\underline{A}, A^+)_\square$ が定まる．この場合は，以降下部線を省略して $(A, A^+)_\square$ と書く．[And21, Proposition 3.34] より，関手

$$\{ \text{完備な affinoid 対} \} \to \mathrm{AnRing};\ (A, A^+) \mapsto (A, A^+)_\square$$

は忠実充満である．Huber による adic 空間の理論は完備な affinoid 対 (A, A^+) を building block として展開される．それゆえこの例は $\mathbb{Z}_\square$ 上の幾何が，（適切な意味で）adic 空間の理論を含むことを意味している．

次の例は非常に重要である．

例 4.14. $\mathbb{Z}_p\langle T\rangle$ を $\mathbb{Z}_p[T]$ の p 進完備化として，$\mathbb{Q}_p\langle T\rangle = \mathbb{Z}_p\langle T\rangle[1/p]$ とおく．このとき解析環の自然な同型 $\mathbb{Z}[T]_\square \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Q}_{p,\square} \cong (\mathbb{Q}_p\langle T\rangle, \mathbb{Z}_p\langle T\rangle)_\square$ が存在する．証明は省略する．例えば [And21, Lemma 4.7] を見よ．この例より，基底変換で安定な性質 $\mathcal{P}$（例えば，cohomological smooth など，これは次の節で説明する）に対し，$\mathbb{Z}_\square \to \mathbb{Z}[T]_\square$ が $\mathcal{P}$ であることが示れば，自動的に $\mathbb{Q}_{p,\square} \to (\mathbb{Q}_p\langle T\rangle, \mathbb{Z}_p\langle T\rangle)_\square$ も $\mathcal{P}$ であることがわかる．つまり，代数幾何的な主張とリジッド解析的な主張を同時に示すことができるのである．

注意 4.15. 凝縮数学では，解析環 A に対して $\mathrm{AnSpec}\, A$ を定義し，これらを適切に貼り合わせることで analytic space（より正確には analytic stack）を定義する[*20]．また $\mathbb{Z}_\square$ 上の幾何 (solid geometry) と言った場合は，考える解析環を $(A, A^+)_\square$ に制限して空間 (solid Huber stack[*21]) を定義する．ここで用いられている位相は 6-functor formalism を用いて定義される複雑なものであり，ここでは省略する．詳しくは [RC26, §6] を見よ．また考える解析環と位相を制限することで，（$\mathbb{Q}_p$ 上の）Berkovich 空間の一般化である導来 Berkovich 空間 (derived Berkovich space) を

[*18] このことを「M は $\mathbb{Z}[f]_\square$ 完備である」ということがある．
[*19] Huber 対 (Huber pair) とも呼ばれる．
[*20] より正確には $\mathrm{AnSpec}\, A$ は単に A に対応する $\mathrm{Aff} = \mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ の対象のことであり，Aff 上の（適切な位相に関する）sheaf of anima として analytic stack を定義する．
[*21] solid $\mathcal{D}$-stack と呼ぶこともある．

定義することもできる．こちらについては [ABLB$^+$25, 4.3] を見よ．

4.2 Serre 双対

この節では凝縮数学を用いた Serre 双対の定式化のアイデアについて簡単に紹介する．基本的には (solid) 準連接層に対する 6-functor formalism を構成し，それを用いて Serre 双対を定式化する（エタールコホモロジー論における Poincaré 双対の類似である）．そのためにまずは開埋め込み j に対して，j^* の左随伴関手 $j_!$ を構成する必要がある．ここでは例として次の開埋め込みを考える：

$$j\colon \operatorname{AnSpec}\mathbb{Z}[T]_\square \to \operatorname{AnSpec}(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square$$

ただし解析環 A に対し，A を $\mathrm{AnRing}^{\mathrm{op}}$ の対象とみなしたものを $\operatorname{AnSpec} A$ と書いている．以下では $\mathbb{Z}[T]$ や $\mathbb{Z}[T]$，$\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ といった離散環を condensed ring とみなす（つまり今までの記法における下部線を省略する）．また T 進位相環 $\mathbb{Z}[[T]]$ や T^{-1} 進位相環 $\mathbb{Z}[[T^{-1}]]$ なども同様に condensed ring とみなす．さらに例 1.8 のように $\mathbb{Z}((T^{-1})) = \mathbb{Z}[[T^{-1}]][T]$ も condensed ring とみなす．

定理 4.16. 関手 $j^* = \mathbb{Z}[T]_\square \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} -\colon \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square) \to \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$[*22]は左随伴関手

$$\begin{aligned} j_!\colon \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square) \to \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square);\ M \mapsto &\quad \operatorname{fib}(M \to \mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} M) \\ &\cong \operatorname{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} M \end{aligned}$$

を持つ[*23]．また $\mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$ から $\mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$ への関手の間の自然な同型

$$j^*(-) \cong R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\operatorname{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))), -)$$

が存在する．

証明. まず関手 $j^*\colon \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square) \to \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$ は忘却関手 $j_*\colon \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square) \to \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$ を右随伴として持つ．関手 j_* は忠実充満であり，これの本質的像は，$M \in \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$ であって，

$$\mathrm{id} - T\sigma^*\colon R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathcal{N}[T], M) \to R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathcal{N}[T], M) \tag{4.1}$$

が同型になるもの全体である．ここで M は solid なので，$\mathcal{N}[T]$ を $\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}[T]$ に取り替えて良い．定理 2.16 と注意 2.17 より，$\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}[T] \cong \mathbb{Z}[[q]][T]$ であり，$\mathrm{id} - T\sigma^*$ は $1 - Tq$ 倍から誘導される．ここで $\mathbb{Z}[[q]][T]$ の $1 - Tq$ による (derived) 商は $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ なので，(4.1) が同型という条件は，

[*22] これまでの記法に合わせるならば，Lj^* と書くべきである（残念ながら $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square \to \mathbb{Z}[T]_\square$ は平坦ではない）．しかしここでは L は省略する

[*23] $\operatorname{fib}(A \to B)$ は $\operatorname{fib}(A \to B) \to A \to B$ がファイバー列（fiber sequence，三角圏の理論では完全三角形に対応する）になるような対象である（無限圏の理論では関手的に定まる）．

$R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathbb{Z}((T^{-1})), M) = 0$ と同値である．さらには

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} \mathbb{Z}((T^{-1})) \\
\cong\ &\mathbb{Z}[[q_1]][T]/^{\mathbb{L}}(1-Tq_1) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} \mathbb{Z}[[q_2]][T]/^{\mathbb{L}}(1-Tq_2) \\
\cong\ &\mathbb{Z}[[q_1,q_2]][T]/^{\mathbb{L}}(1-Tq_1, 1-Tq_2) \\
\cong\ &\mathbb{Z}((T^{-1}))
\end{aligned}$$

となる（つまり $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ は idempotent $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square$-algebra である）．以上のことから，形式的な議論により，

$$j_! \colon \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square) \to \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square);\ M \mapsto \mathrm{fib}(M \to \mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} M)$$

と関手 $j_!$ を定義すると，これが j^* の左随伴になることがわかる．また j^* の表記も形式的な議論から従う． □

注意 4.17. この構成の背後にある幾何学的直感を説明する．$i\colon \mathrm{AnSpec}(\mathbb{Z}((T^{-1})),\mathbb{Z})_\square \to \mathrm{AnSpec}(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square$ とおく．このとき，$\mathbb{Z}((T^{-1}))$ が idempotent $(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square$-algebra であることから，$i$ は閉埋め込み[*24]と思える．さらには $j_*\colon \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square) \to \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$ の本質的像は，$M \in \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$ であって $R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\mathbb{Z}((T^{-1})), M) = 0$ となるもの全体である．つまり開埋め込み j は i の complement である．すると $M \in \mathcal{D}((\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square)$ に対し，次の fiber sequence が存在する（べきである）：

$$j_!j^*M \to M \to i_*i^*M.$$

ここで $i_*i^*M \cong \mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} M$ より，$j_!j^*M \cong \mathrm{fib}(M \to \mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\square} M)$ となる．このことから定理中の $j_!$ の定義が自然に出てくる．同様に

$$i_*i^!M \to M \to j_*j^*M$$

（ただし $i^!$ は i_* の右随伴関手）という fiber sequence を考えると j^* の表記も得られる．

注意 4.18. 形式的な議論で，$j^*i_* = 0$ が成立することがわかる．ここで自然な射

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}[T] \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[T] \tag{4.2}$$

は単射であり，cokernel は $\mathbb{Z}((T^{-1}))$-module になる（つまり i_* の本質的像に入る）ことがわかる．これより (4.2) に j^* を適用すると，同型 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}_\square} \mathbb{Z}[T]_\square \cong \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[T]$ が得られる．

この例を参考にして，一般には開埋め込みを次のように定義する．

定義 4.19. 射 $j\colon \mathrm{AnSpec}\, B \to \mathrm{AnSpec}\, A$ が開埋め込みであるとは，j_* が忠実充満かつその本質的像がある idempotent animated A-algebra C を用いて $R\underline{\mathrm{Hom}}_A(C, -)$ の消滅で特徴づけられることをいう．このとき j^* は左随伴関手 $j_!$ を持ち，さらにこれは射影公式を満たす．つま

[*24] 実は，これが凝縮数学における閉埋め込みの定義である．

り $M \in \mathcal{D}(A)$ と $N \in \mathcal{D}(B)$ に対し，自然な射 $j_!(N \otimes^{\mathbb{L}}_B j^*M) \to j_!N \otimes^{\mathbb{L}}_A M$ が同型になる．証明は [CS26, Lecture V]，[RC26, 5.1, 5.2, Definition 6.3.2] を見よ．また $j^! = j^*$ によって関手 $j^!\colon \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(B)$ を定義する．

例 4.20. 射 $j\colon \operatorname{AnSpec}(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}], \mathbb{Z}[T^{-1}])_\square \to \operatorname{AnSpec}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square$ は開埋め込みである．対応する idempotent $\mathbb{Z}[T]_\square$-algebra は $\mathbb{Z}[[T]]$ である．

注意 4.21. 古典的なスキーム論においては，関手 $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}] \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}[T]} -\colon \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]) \to \mathcal{D}(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}])$ は極限を保たないため，この関手の左随伴は存在しない．そこで圏を $\mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$，$\mathcal{D}(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]_\square)$ のように，より大きな圏に取り替えることで，左随伴を構成できるようにしたのである．なお，このように圏を適切に取り替えることで，j^* の左随伴を構成するというアイデア自体は古くから存在する．例えば [Har66] には，圏を $\operatorname{Pro}\mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{Z}[T])$，$\operatorname{Pro}\mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{Z}[T^{\pm 1}])$ に取り替えるという Deligne のアイデアが登場する．[Sch26c, Lecture VIII] も見よ．

次に「固有射」とコンパクト化について説明する．

定義 4.22. 射 $f\colon \operatorname{AnSpec} B \to \operatorname{AnSpec} A$ がコホモロジー的に固有 (cohomologically proper)[*25] であるとは，B の解析環構造が A の解析環構造から誘導されるものであることをいう．このとき $f_!$ を忘却関手 $f_*\colon \mathcal{D}(B) \to \mathcal{D}(A)$ として定義する．この関手もまた射影公式を満たす．つまり $M \in \mathcal{D}(A)$ と $N \in \mathcal{D}(B)$ に対し，自然な射 $M \otimes^{\mathbb{L}}_A f_!N \to f_!(f^*M \otimes^{\mathbb{L}}_B N)$ が同型になる．また $f^!\colon \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(B);\ M \mapsto R\underline{\operatorname{Hom}}_A(B, M)$ と定義する．これは $f_!$ の右随伴になる．

以上の準備のもとで，$f\colon \operatorname{AnSpec}\mathbb{Z}[T]_\square \to \operatorname{AnSpec}\mathbb{Z}_\square$ に対し，$f^!$，f^* を計算し，この射が Poincaré 双対を満たす（つまり f はコホモロジー的に滑らか (cohomologically smooth) である）ことを示そう．まず f は次のように分解される（f のコンパクト化）：

$$\operatorname{AnSpec}\mathbb{Z}[T]_\square \xrightarrow{j_1} \operatorname{AnSpec}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\square \xrightarrow{g} \operatorname{AnSpec}\mathbb{Z}_\square.$$

ここで $j_1^!$，$g^!$ はすでに定義したので，これの合成として $f^!$ が定義できる．

定理 4.23 (Poincaré 双対)**.** $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_\square)$ から $\mathcal{D}(\mathbb{Z}[T]_\square)$ への関手の間の自然な同型 $f^!(-) \cong f^*(-) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}[T]_\square} \mathbb{Z}[T][1]$ が存在する．

証明. まず

$$\begin{aligned} f^!(-) \cong j_1^! g^!(-) &\cong R\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}[T]}(\operatorname{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))), R\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[T], -)) \\ &\cong R\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))), -) \end{aligned}$$

という同型がある．また $\operatorname{fib}(\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}((T^{-1}))) \cong (\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}T^{-i})[-1]$ であり，これは $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_\square)$ のコンパクト対象である．よって $f^!$ は余極限を保つ．また付録の系 A.32 より，$f^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[T][1]$ もわかる．さて 6-functor formalism の一般論から，$f^*(-) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}[T]_\square} f^!\mathbb{Z} \to f^!(-)$ という自然変換が定

[*25] 「コホモロジー的に固有」の意味は文献によって微妙に異なるので注意せよ．

まる（$f_!$ に対する射影公式 (projection formula) から定まる）．両辺ともに余極限を保つので，系 2.19 より，$f^*(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}[T]_\square} f^!\mathbb{Z}\to f^!(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})$ が同型を示せば十分である．これは $f^!$ が極限を保つことと注意 4.18 から従う． □

この定理を貼り合わせることで，$f\colon \mathbb{P}^1\to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ のような射（の solid 化）に対しても Poincaré 双対を示すことができる．このことから古典的な Serre 双対も導出できる．詳しくは [Sch26b, Lecture XI] を見よ．また analytic stack に対する 6-functor formalism についての詳細な説明は [RC26, §6] を見よ．

最後に analytic stack に対する 6-functor formalism の応用をいくつか紹介する．

例 4.24. (1) [Mik26] にて，筆者は p 進体の $\mathbb{Q}_p$ 係数の Galois cohomology（より正確には Robba 環上の (φ,Γ) 加群のコホモロジー）に対する局所 Tate 双対を，analytic stack に対する 6-functor formalism を用いて証明した．この証明では $\bmod p$ に還元せずに，$\mathbb{Q}_p$ 係数のまま局所 Tate 双対を示すことができる．

(2) [ABLB$^+$25] にて，p 進幾何におけるさまざまなコホモロジー（de Rham コホモロジーなど）が対応する stack（de Rham stack など）上の準連接層のコホモロジーとして実現されることが示された．これにより，perfectoid 空間の de Rham コホモロジー（や Hyodo-Kato コホモロジー）などが適切に考えられるようになった．これらは局所解析的な完備コホモロジー (completed cohomology) の研究に応用されることが期待されている．これらの理論の続きとして，Anschütz–Le Bras–Rodríguez Camargo–Scholze によって，リジッド解析空間に対する prismatization についても研究されている．関連して，[Hau26] にて，リジッド解析空間に対する syntomification も研究されている．

付録 A　技術的な主張の証明

2 章で述べた技術的な主張の証明を与える．参考文献は [RC26, Ked26] である．

A.1　Locally profinite set のコンパクト化

ここでは，のちの証明で必要になる locally profinite set のコンパクト化とその性質について紹介する．一般に位相空間 S に対し，$C(S,\mathbb{F}_2)$ で S 上 $\mathbb{F}_2$ に値をもつ連続関数のなす Bool 環（全ての元が冪等 (idempotent) な環）を表す．次の結果は profinite set の理論において基本的である．

命題 A.1 (Stone 双対)**.** Profinite set のなす圏 Prof と，Bool 環のなす圏 Bool の間に，次の反変圏同値が存在する：

$$\mathrm{Prof}\to\mathrm{Bool};\ S\mapsto C(S,\mathbb{F}_2),\quad \mathrm{Bool}\to\mathrm{Prof};\ A\mapsto \operatorname{Spec}A.$$

これらは互いが互いの準逆になっている．また Bool 環 A に対し，$\operatorname{Spec}A$ が light profinite set になることは A が高々可算であることと同値である．

補題と定義 A.2. U を locally profinite set として，$\beta U=\operatorname{Spec}C(U,\mathbb{F}_2)$ と定義する．このとき自然な開埋め込み $U\hookrightarrow\beta U$ が存在する．これにより U を βU の開集合とみなす．また U は βU

において稠密である．

証明. まず $u \in U$ に対して，極大イデアル $\mathfrak{m}_u \subset C(U, \mathbb{F}_2)$ が $\mathrm{ev}_u \colon C(U, \mathbb{F}_2) \to \mathbb{F}_2;\ f \mapsto f(u)$ による $(0) \subset \mathbb{F}_2$ の逆像として定まる．これにより単射写像 $i \colon U \to \beta U = \operatorname{Spec} C(U, \mathbb{F}_2);\ u \mapsto \mathfrak{m}_u$ を得る．さて $C_c(U, \mathbb{F}_2)$ を U から $\mathbb{F}_2$ へのコンパクト台を持つ連続関数全体のなす集合とする．これは $C(U, \mathbb{F}_2)$ のイデアルになる，これが定める $\beta U = \operatorname{Spec} C(U, \mathbb{F}_2)$ の閉集合を Z とおく．

$f \in C_c(U, \mathbb{F}_2)$ に対して，f の台 (support) を考えることで，$C_c(U, \mathbb{F}_2)$ の元は U のコンパクト開集合と一対一に対応することがわかる．U のコンパクト開集合 V に対応する $C_c(U, \mathbb{F}_2)$ の元を $\mathbf{1}_V$ とおく．このとき基本開集合 $D(\mathbf{1}_V)$ は $\operatorname{Spec} C(U, \mathbb{F}_2)[1/\mathbf{1}_V] \cong \operatorname{Spec} C(V, \mathbb{F}_2)$ と表せる．また命題 A.1 より，$i \colon U \to \operatorname{Spec} C(U, \mathbb{F}_2)$ は同相 $V \xrightarrow{\sim} D(\mathbf{1}_V)$ を誘導する．以上より，U のコンパクト開集合全体で V を動かすことで，$i \colon U \hookrightarrow \operatorname{Spec} C(U, \mathbb{F}_2)$ は $\operatorname{Spec} C(U, \mathbb{F}_2) \setminus Z$ への同相を与えることがわかる．

最後に稠密性を示す．$f \in C(U, \mathbb{F}_2) \setminus \{0\}$ をとる．$i(U) \cap D(f) \neq \emptyset$ を示せば良い．まず f の台は空でない U の開集合である．よってこれに含まれる U の空でないコンパクト開集合 V が存在する．このとき $D(\mathbf{1}_V) \subset D(f)$ となる．また $i(U) \cap D(\mathbf{1}_V) = i(V)$ は空ではない．これで示された． □

注意 A.3. $U = Z_1 \amalg Z_2$ と分解しているとき，$\beta U = \beta Z_1 \amalg \beta Z_2$ となる．

補題 A.4. βU は次の意味で U の普遍的なコンパクト化である：任意の profinite set S と連続写像 $U \to S$ に対して，これは $\beta U \to S$ に一意的に伸びる．

証明. $U \to S$ より $C(S, \mathbb{F}_2) \to C(U, \mathbb{F}_2)$ が誘導される．これの Spec をとり，$\beta U = \operatorname{Spec} C(U, \mathbb{F}_2) \to \operatorname{Spec} C(S, \mathbb{F}_2) \cong S$ を得る．これは $U \to S$ の延長になっている．一意性は $U \subset \beta U$ の稠密性より良い． □

注意 A.5. 実はより強く βU は U の Stone-Cěch コンパクト化になっているが，ここでは必要ないので省略する．

補題 A.6. S を profinite set，U を S の開集合とする．また profinite set T から U への固有連続写像（つまりコンパクト部分空間の逆像がコンパクトになる）をとる．また $f \colon \beta(T) \to S$ を $T \twoheadrightarrow U$ の延長とする．このとき $S \setminus U$ の逆像は $\beta T \setminus T$，U の逆像は T となる．

証明. $f(T) \subset U$ より，$f(\beta T \setminus T) \subset S \setminus U$ を示せば良い．まず $S \cong \operatorname{Spec} C(S, \mathbb{F}_2)$ のもと，U に台を持つ関数のなすイデアル $C_U(S, \mathbb{F}_2)$ が閉集合 $S \setminus U$ と対応する．また $C(S, \mathbb{F}_2) \to C(U, \mathbb{F}_2)$ による $C_U(S, \mathbb{F}_2)$ の像は $C_c(U, \mathbb{F}_2)$ に含まれる．ここで $T \to U$ は固有なので，$C(U, \mathbb{F}_2) \to C(T, \mathbb{F}_2)$ による $C_c(U, \mathbb{F}_2)$ の像はイデアル $C_c(T, \mathbb{F}_2)$ に入る．このイデアルが定める閉集合が $\beta(T) \setminus T$ なので示された． □

補題 A.7. U を locally profinite set，S を profinite set とする．$S = \varprojlim_{i \in I} S_i$ と有限集合 S_i の cofiltered limit で表し，自然な射影 $S \to S_i$ を q_i とおく．また $f_1, f_2 \colon U \to S$ を連続写像とし

て，これらを $\overline{f_1}, \overline{f_2}\colon \beta U \to S$ に延長する．このとき $\overline{f_1}$ と $\overline{f_2}$ が $\beta U \setminus U$ 上一致するための必要十分条件は，任意の i に対して $q_i \circ f_1$ と $q_i \circ f_2$ が U のあるコンパクト開集合の外側で一致することである．

証明. $\overline{f_1}$ と $\overline{f_2}$ が $\beta U \setminus U$ 上一致することは，任意の $i \in I$ に対し，$q_i \circ \overline{f_1}$ と $q_i \circ \overline{f_2}$ が $\beta U \setminus U$ 上一致することと同値である．これより，S を S_i に取り替えて，S は有限集合であるとして良い．さて，f_1 と f_2 が U のあるコンパクト開集合の外側で一致することは，任意の $s \in S$ に対して $f_1^{-1}(s)$ と $f_2^{-1}(s)$ の対称差集合がコンパクト開集合になることとで同値である．これは，f_1，f_2 がそれぞれ誘導する射 $C(S, \mathbb{F}_2) \to C(U, \mathbb{F}_2)$ が $C_c(U, \mathbb{F}_2)$ を法として一致することと同値である．つまり，$\overline{f_1}$ と $\overline{f_2}$ が $\beta U \setminus U$ 上一致することと同値である． □

定義 A.8. Light locally profinite set とは第二可算的な locally profinite set のこととする．

補題 A.9. U を light locally profinite set とする．このとき light profinite set S と，開埋め込み $U \to S$ が存在する．

証明. まず $C_c(U, \mathbb{F}_2)$ は高々可算集合である．よってこれが生成する $C(U, \mathbb{F}_2)$ の部分代数 A も高々可算になる．よって $\operatorname{Spec} A$ は light profinite set になる．あとは補題 A.2 と同様にして，開埋め込み $U \to \operatorname{Spec} A$ が構成できる． □

A.2 Light locally profinite set に付随する condensed abelian group

補題 A.10. S を light profinite set，D を S の閉集合とする．このとき自然な射 $\mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}[S]$ は単射である．以降これにより，$\mathbb{Z}[D] \subset \mathbb{Z}[S]$ とみなす．

証明. 定義 2.1 に表れる前層の間の射

$$(T \mapsto \mathbb{Z}^{\oplus \underline{D}(T)}) \to (T \mapsto \mathbb{Z}^{\oplus \underline{S}(T)})$$

は単射である．これの層化が $\mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}[S]$ なので示された． □

補題 A.11. $f\colon S \to S'$ を light profinite set の間の全射連続写像とする．また開集合 $U \subset S'$ であって $f^{-1}(U) \to U$ が同相になるものを考える．$D = S \setminus f^{-1}(U)$，$D' = S' \setminus U$ とおく．このとき自然な射 $\mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}[S']/\mathbb{Z}[D']$ は同型である．

証明. 自然な図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[D] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[D'] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[S']. \end{array}$$

が $\mathrm{Cond(Ab)}$ における押し出し (pushout square) になることを示せば良い．これは，任意の condensed abelian group M に対し，次の図式が集合の圏 Set における引き戻し (pullback) にな

ることと同値である：

$$\begin{array}{ccc} M(D) & \longleftarrow & M(S) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M(D') & \longleftarrow & M(S') \end{array}$$

$f \in M(S)$ と $g \in M(D')$ であって $f|_D = g|_D$ を満たすものを考える．これらが $M(S')$ の元に一意的に持ち上がることを示せば良い．まず $D \to D'$，$S \to S'$ が全射であることから，$M(D') \to M(D)$，$M(S') \to M(S)$ は単射である．よって $f \in M(S)$ が $M(S')$ の元に持ち上がることを示せば十分である．Condensed abelian group の定義より，

$$M(S') \cong \mathrm{Eq}(M(S) \rightrightarrows M(S \times_{S'} S))$$

である．$p_i \colon S \times_{S'} S \to S$ を i 番目の射影とする $(i = 1, 2)$．また $\Delta \colon S \to S \times_{S'} S$ を対角射とする．このとき仮定より，$\Delta(S), D \times_{D'} D \subset S \times_{S'} S$ は $S \times_{S'} S$ の閉被覆になる．$p_1^*(f)$ と $p_2^*(f)$ は $\Delta(S)$ 上で一致する．$f|_D = g|_D$ となる $g \in M(D')$ の存在から，$p_1^*(f)$ と $p_2^*(f)$ は $D \times_{D'} D$ 上でも一致する．よって $p_1^*(f) = p_2^*(f)$ である．以上で $f \in M(S)$ が $M(S')$ の元に持ち上がることが示された． □

この章の証明では，light とは限らない profinite set を考える方が便利である．そこで次を導入する．

定義 A.12. S を profinite set とする．Λ_S で S から light profinite set への連続写像のなす圏を表す．ただし $S \xrightarrow{f_1} T_1$ から $S \xrightarrow{f_2} T_2$ への射は連続写像 $g \colon T_1 \to T_2$ であって $g \circ f_1 = f_2$ を満たすものと定義する．そして $\mathbb{Z}[S] = \varprojlim_{(S \to T) \in \Lambda_S} \mathbb{Z}[T]$ と定義する．この構成は S について関手的である．

注意 A.13. S が light profinite set の場合は Λ_S は終対象 $S \xrightarrow{\mathrm{id}} S$ を持つ．よって $\mathbb{Z}[S]$ はすでに定義したものと一致する．

注意 A.14. Profinite set S が light profinite set の ω_1-cofiltered limit $S \cong \varprojlim_{i \in I} S_i$ として表されるとき，$\mathbb{Z}[S] \cong \varprojlim_{i \in I} \mathbb{Z}[S_i]$ である．

補題 A.15. $f \colon S \to S'$ を profinite set S から light profinite set S' への全射連続写像とする．また開集合 $U \subset S'$ であって $f^{-1}(U) \to U$ が同相になるものを考える．自然な射 $\mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}[S']/\mathbb{Z}[D']$ は同型である．

証明. Profinite set S を S' 上の light profinite set の ω_1-cofiltered limit $S \cong \varprojlim_{i \in I} S_i$ として表す．ただし推移写像 $S_j \to S_i$ は全射であるとする．ここで $D_i = (S_i \to S')^{-1}(D') \subset S_i$ とする．すると $D \cong \varprojlim_{i \in I} D_i$ である．よって $\mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D] \cong \varprojlim_{i \in I} \mathbb{Z}[S_i]/\mathbb{Z}[D_i]$ である．一方で $S_i \to S'$ と $D' \subset S'$ は補題 A.11 の条件を満たすので，$\mathbb{Z}[S_i]/\mathbb{Z}[D_i] \cong \mathbb{Z}[S']/\mathbb{Z}[D']$ である．以上より $\mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D] \cong \mathbb{Z}[S']/\mathbb{Z}[D']$ を得る． □

系 A.16. S を light profinite set, U を S の開集合として，$D = S \setminus U$ とおく．このとき，自然な射 $f\colon \beta U \to S$ は同型 $\mathbb{Z}[\beta U]/\mathbb{Z}[\beta U \setminus U] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D]$ を誘導する．

証明. まず補題 A.6 より $f^{-1}(U) \to U$ は同相である．よって補題 A.15 より良い． □

定義 A.17. Light locally profinite set U に対して，$\mathbb{Z}[U] = \mathbb{Z}[\beta U]/\mathbb{Z}[\beta U \setminus U]$ と定義する．この構成は, 補題 A.6 より, 次の意味で関手的である：$f\colon U \to V$ を light locally profinite set の間の固有連続写像としたとき，$f\colon \beta U \to \beta V$ は $\mathbb{Z}[U] = \mathbb{Z}[\beta U]/\mathbb{Z}[\beta U \setminus U] \to \mathbb{Z}[V] = \mathbb{Z}[\beta V]/\mathbb{Z}[\beta V \setminus V]$ を誘導する．

例 A.18. (1) U が light profinite set のとき，$\beta U = U$ である．よって上で定義した $\mathbb{Z}[U]$ はすでに定義したものと一致する．

(2) 系 A.16 より, $\mathcal{N} = \mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty]/\mathbb{Z}[\{\infty\}] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{N}]$ となることがわかる（$\mathbb{N}$ は離散集合とみなす）．

補題 A.19. U，V を light locally profinite set とする．このとき自然な同型 $\mathbb{Z}[U] \otimes \mathbb{Z}[V] \cong \mathbb{Z}[U \times V]$ が存在する．

証明. U，V ともに light profinite set のときは良い．V が light profinite set とする．補題 A.9 を用いて，light profinite set S と開埋め込み $U \to S$ をとる．これにより $U \subset S$ とみなし，$D = S \setminus U$ とおく．このとき系 A.16 より，$\mathbb{Z}[U] \cong \mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D]$ となる．すると

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[U] \otimes \mathbb{Z}[V] \cong (\mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D]) \otimes \mathbb{Z}[V] &\cong (\mathbb{Z}[S] \otimes \mathbb{Z}[V])/(\mathbb{Z}[D] \otimes \mathbb{Z}[V]) \\ &\cong \mathbb{Z}[S \times V]/\mathbb{Z}[D \times V] \\ &\cong \mathbb{Z}[U \times V]\end{aligned}$$

となる．U，V がともに light profinite set でない場合も同様に証明できる． □

補題 A.20. S を light profinite set，D を S の閉集合とする．このとき $D \subset S$ のレトラクション $S \to D$ が存在する[*26]．

証明. $S = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} S_n$ と有限集合 S_n の極限として S を表す．ただし推移写像 $S_{n+1} \to S_n$ は全射であるとする．また D_n を $S \to S_n$ による D の像とする．このとき $D = \varprojlim_n D_n$ である．さて $g_0\colon S_0 \to D_0$ を $D_0 \subset S_0$ のレトラクションとする．すると $S_1 \to S_0 \xrightarrow{g_0} D_0$ は $D_1 \subset S_1$ のレトラクション $g_1\colon S_1 \to D_1$ に持ち上がる．以下この議論を繰り返し，$D_n \subset S_n$ のレトラクション $g_n\colon S_n \to D_n$ であって g_{n-1} と整合的なものを得る．そして $g = \varprojlim_n g_n\colon \varprojlim_n S_n = S \to \varprojlim_n D_n = D$ とおけば，これが $D \subset S$ のレトラクションになる． □

補題 A.21. U を light profinite set とする．このとき $\mathbb{Z}[U]$ は平坦な condensed abelian group である．

証明. 補題 A.9 を用いて，light profinite set S と開埋め込み $U \to S$ をとる．これにより $U \subset S$

[*26] この命題は S が単なる profinite set の場合は成立するとは限らない

とみなし，$D = S \setminus U$ とおく．このとき系 A.16 より，$\mathbb{Z}[U] \cong \mathbb{Z}[S]/\mathbb{Z}[D]$ となる．ここで補題 A.20 より単射 $D \to S$ はレトラクションを持つので，$\mathbb{Z}[U]$ は $\mathbb{Z}[S]$ の直和因子になる．よって $\mathbb{Z}[S]$ が平坦を言えば良いが，$\mathbb{Z}[S]$ は平坦な前層の層化なので良い． □

A.3 補題 2.4 の証明

定理 A.22 ([Ked26, Proposition 5.4.8])**.** 関手 $\mathrm{Cond(Ab)} \to \mathrm{Cond(Ab)};\ M \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)$ は完全である．

証明. $L \to M$ を condensed abelian group の全射とする．$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, L) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)$ が全射であることを示せば良い．S を light profinite set として，$f \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, M)(S)$ をとる．f は $\mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}[S] \to M$ と対応する．この射も f と書くことにする．示すべきは light profinite set の全射 $T \to S$ と射 $g\colon \mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}[T] \to L$ であって，次の図式を可換にするものが存在することである：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}[T] & \xrightarrow{g} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}[S] & \xrightarrow{f} & M. \end{array}$$

さて $\mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}[S] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty \times S]/\mathbb{Z}[\{\infty\} \times S]$ である．$L \to M$ は全射なので，light profinite set の全射 $S' \to \mathbb{N}_\infty \times S$ であって，

$$\mathbb{Z}[S'] \to \mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty \times S] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{N} \times S] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty \times S]/\mathbb{Z}[\{\infty\} \times S] \xrightarrow{f} M \tag{A.1}$$

が $h\colon \mathbb{Z}[S'] \to L$ に持ち上がるようなものが存在する．D' を射 $S' \to \mathbb{N}_\infty \times S$ による $\{\infty\} \times S$ の逆像とする．補題 A.20 より，$D' \subset S'$ のレトラクション $S' \to D'$ が取れる．$r\colon S' \to D' \subset S'$ とおく．また $h \circ r\colon \mathbb{Z}[S'] \xrightarrow{r} \mathbb{Z}[S'] \to L$ とおく．このとき $h - h \circ r$ も (A.1) の持ち上げである．よって h を $h - h \circ r$ に取り替えて，$\mathbb{Z}[D']$ 上では 0 であるとして良い．特に $h\colon \mathbb{Z}[S' \setminus D'] = \mathbb{Z}[S']/\mathbb{Z}[D'] \to L$ を得る．

$n \in \mathbb{N}$ に対し，S'_n を $S' \to \mathbb{N}_\infty \times S$ による $\{n\} \times S$ の逆像とする．これは $\{n\} \times S \cong S$ により，S 上の light profinite set となる．T を S'_n たちの S 上のファイバー積（$T = S'_0 \times_S S'_1 \times_S \cdots$）とする．これも light profinite set である．構造射 $T \to S$ を q と書く．また $n \in \mathbb{N}$ に対し，$q_n\colon T \to S'_n \subset S'$ とおく．すると $\mathbb{N} \times T \to S';\ (n, t) \mapsto q_n(t)$ という連続写像が定まる．これの像は $S' \setminus D'$ である．また誘導される連続写像 $\mathbb{N} \times T \to S' \setminus D'$ は固有である．実際 $S' \setminus D' = \coprod_n S'_n$ であり，S'_n の逆像 $\{n\} \times T$ はコンパクトである．これより射

$$g\colon \mathbb{Z}[\mathbb{N} \times T] \to \mathbb{Z}[S' \setminus D'] \xrightarrow{h} L$$

を得る．すると構成より次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\mathbb{N} \times T] & \xrightarrow{g} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\mathbb{N} \times S] & \xrightarrow{f} & M. \end{array}$$

さらに縦の射 $\mathbb{Z}[\mathbb{N}\times T]\to\mathbb{Z}[\mathbb{N}\times S]$ は $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\times q$ から誘導されている．以上で示された． □

A.4 定理 2.16 の証明

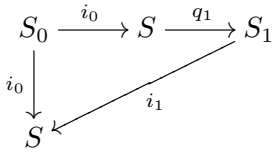
4 章と同様に，離散集合は断らない限り condensed set とみなすことにする．例えば $\mathbb{Z}$ で condensed abelian group $\underline{\mathbb{Z}}$ を表す．また $\underline{\mathbb{R}}$（ここで $\mathbb{R}$ には Euclid 位相を入れる）のことも単に $\mathbb{R}$ と書く．

まず位数無限の light profinite set S に対し，$\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}}\cong\mathcal{N}^{\square}$ を示す．

記号 A.23. S, T を light locally profinite set，$U\subset S$ を開かつ閉集合とする．また固有連続写像 $f\colon S\setminus U\to T$ をとる．このとき射 $\mathbb{Z}[S]=\mathbb{Z}[S\setminus U]\oplus\mathbb{Z}[U]\to\mathbb{Z}[T]$ を $\mathbb{Z}[S\setminus U]$ 上では f から誘導される射，$\mathbb{Z}[U]$ 上では 0 として定義する．こうして定まる射 $\mathbb{Z}[S]\to\mathbb{Z}[T]$ も f と書く．

定理 A.24. 位数無限の light profinite set S に対し，（非標準的な）同型 $\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}}\cong\mathcal{N}^{\square}$ が存在する．

証明. 最初に証明に必要な記号の準備をする．$S=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}S_n$ と有限集合の極限で表す．ただし推移写像 $S_{n+1}\to S_n$ は全射とする．自然な射影 $S\twoheadrightarrow S_n$ を q_n とおく．まず $i_0\colon S_0\to S$ を q_0 の切断 (section)（つまり $q_0\circ i_0$ が恒等写像になる）とする．次に q_1 の切断 $i_1\colon S_1\to S$ を図式



が可換になるようにとる．以下これを繰り返し，q_n の切断 $i_n\colon S_n\to S$ を定める．そして $T_n=S_n\setminus q_n\circ i_{n-1}(S_{n-1})$ と定める（$T_0=S_0$ とする）．また $T=\bigcup_n i_n(S_n)$ とする．位相は離散位相を考える．このとき $T\cong T_0\amalg T_1\amalg\cdots$ となる．さて同型 $T\cong\mathbb{N}$ を固定し，$m\in\mathbb{N}$ に対応する T の元を t_m と書く．また $\sigma\colon T\to T$; $t_m\mapsto t_{m+1}$ とおく．

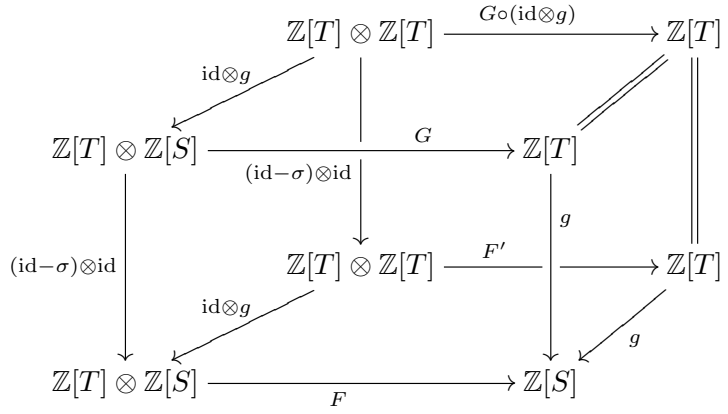
以上の準備のもと，まずは射 $g\colon\mathbb{Z}[T]\to\mathbb{Z}[S]$ を構成する．まず $\varphi_1\colon T\to S$ を包含から誘導される射とする．また $\varphi_2\colon T\setminus T_0\to S$ を，$t\in T_n$（ただし $n\geq 1$）に対し $\varphi_2(t)=i_{n-1}q_{n-1}(t)$ によって定義する．このとき φ_1 は $\varphi_1\colon\beta T\to S$ を，φ_2 は $\varphi_2\colon\beta(T\setminus T_0)=(\beta T)\setminus T_0\to S$ を誘導する．ここで補題 A.7 より，これらは $\beta T\setminus T$ 上では一致する．よって

$$\varphi_1-\varphi_2\colon\mathbb{Z}[\beta T]/\mathbb{Z}[\beta T\setminus T]=\mathbb{Z}[T]\to\mathbb{Z}[S]$$

という射を得る．こうして定まった射 $\varphi_1-\varphi_2$ を $g\colon\mathbb{Z}[T]\to\mathbb{Z}[S]$ と書く．

では次に g の solid 化 $g^{\mathbb{L}\square}\colon\mathbb{Z}[T]^{\mathbb{L}}\to\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}}$ が同型になることを示す．次の主張を考える：可換

図式



が存在する．さらに $F\colon \mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[S]\to\mathbb{Z}[S]$，$F'\colon \mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[T]\to\mathbb{Z}[T]$ は，それぞれ切断 $i\colon \mathbb{Z}[T]\to\mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[S]$，$i'\colon \mathbb{Z}[T]\to\mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[T]$ を持ち，次の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[T] & \xleftarrow{i'} & \mathbb{Z}[T]\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes g} & & \downarrow{\scriptstyle g}\\ \mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[S] & \xleftarrow[i]{} & \mathbb{Z}[S].\end{array}$$

一旦この主張を認める．ソリッド化の定義から，任意の condensed abelian group M に対して，$(\mathrm{id}-\sigma)\otimes\mathrm{id}\colon \mathbb{Z}[T]\otimes M\to\mathbb{Z}[T]\otimes M$ から誘導される $((\mathrm{id}-\sigma)\otimes\mathrm{id})^{\mathbb{L}\square}\colon (\mathbb{Z}[T]\otimes M)^{\mathbb{L}\square}\to(\mathbb{Z}[T]\otimes M)^{\mathbb{L}\square}$ は同型になる．このことに注意して，主張の二つの図式の solid 化をとって図式追跡をすることで，

$$g^{\mathbb{L}\square}\colon \mathbb{Z}[T]^{\mathbb{L}\square}\to\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}$$

が同型であることがわかる．より正確には，合成

$$\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}\xrightarrow{i^{\mathbb{L}\square}}(\mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[S])^{\mathbb{L}\square}\underset{\sim}{\xleftarrow{((\mathrm{id}-\sigma)\otimes\mathrm{id})^{\mathbb{L}\square}}}(\mathbb{Z}[T]\otimes\mathbb{Z}[S])^{\mathbb{L}\square}\xrightarrow{G^{\mathbb{L}\square}}\mathbb{Z}[T]^{\mathbb{L}\square}$$

が $g^{\mathbb{L}\square}$ の逆射を与えることが図式追跡で証明できる．

では主張の証明に入る．構成すべきは F, F', G, i, i' の 5 つの射である．まず

$$F\colon \mathbb{Z}[T]\times\mathbb{Z}[S]=\mathbb{Z}[T\times S]\to\mathbb{Z}[S]$$

から構成する．まず自然な射影

$$T\times S\to S;\ (t,s)\mapsto s$$

を延長して

$$F_1\colon \beta(T\times S)\to S$$

を定める．次に連続写像

$$(T\setminus\{t_0\})\times S\to S;\ (t_m,s)\mapsto i_{m-1}q_{m-1}(s)$$

を延長して

$$F_2 \colon \beta(T \times S) \setminus (\{t_0\} \times S) \cong \beta((T \setminus \{t_0\}) \times S) \to S$$

を定める．補題 A.7 より，これらは $\beta(T \times S) \setminus (T \times S)$ 上一致する．よって

$$F = F_1 - F_2 \colon \mathbb{Z}[T \times S] = \mathbb{Z}[\beta(T \times S)]/\mathbb{Z}[\beta(T \times S) \setminus (T \times S)] \to \mathbb{Z}[S]$$

が定まる．

次に i を，固有連続写像 $S \to T \times S;\ s \mapsto (t_0, s)$ が誘導する射 $\mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T \times S]$ として定める．これは F の切断になる．

次に

$$G \colon \mathbb{Z}[T \times S] \to \mathbb{Z}[T]$$

を構成する．まず $Z = \{(t_m, s) \in T \times S \mid q_m(s) \notin T_m\} \subset T \times S$ と定義する．これは $T \times S$ の開かつ閉集合になる．そして

$$G \colon (T \times S) \setminus Z \to T;\ (t_m, s) \mapsto i_m q_m(s)$$

と定義すると，これは固有連続連続写像になるので，射

$$G \colon \mathbb{Z}[T \times S] \to \mathbb{Z}[T]$$

が定まる．

次に

$$F' \colon \mathbb{Z}[T \times T] \to \mathbb{Z}[T]$$

を構成する．$Z' = \{(t_m, t) \in T \times T \mid t \in T_n \text{ かつ } n < m\} \subset T \times T$ と定義する．これは開かつ閉集合である（$T \times T$ の位相は離散位相である）．そして

$$F' \colon (T \times T) \setminus Z' \to T;\ (t_m, t) \mapsto t$$

と定義すると，これは固有連続連続写像になるので，射

$$F' \colon \mathbb{Z}[T \times T] \to \mathbb{Z}[T]$$

が定まる．

最後に i' を固有連続写像 $T \mapsto T \times T;\ t \mapsto (t_0, t)$ が誘導する射 $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T \times T]$ として定める．これは F' の切断になる．

あとは図式の可換性を証明すれば良い．これは構成から直接確認できる．例として次の図式の可換性のみ証明する：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[T \times S] & \xrightarrow{G} & \mathbb{Z}[T] \\ {\scriptstyle (\mathrm{id}-\sigma)\otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z}[T \times S] & \xrightarrow[F]{} & \mathbb{Z}[S]. \end{array}$$

$\mathbb{Z}[\beta(T\times S)]\twoheadrightarrow\mathbb{Z}[T\times S]$ を合成して考える．連続写像 $T\times S\to S;\ (t_m,s)\mapsto i_mq_m(s)$ の延長を $F_3\colon\beta(T\times S)\to S$ と書く．このとき

$$\mathbb{Z}[\beta(T\times S)]\twoheadrightarrow\mathbb{Z}[T\times S]\xrightarrow{(\mathrm{id}-\sigma)\otimes\mathrm{id}}\mathbb{Z}[T\times S]\xrightarrow{F}\mathbb{Z}[S]$$

は F_3-F_2 と一致する．次に連続写像

$$(T\times S)\setminus Z\to S;\ (s,t_m)\mapsto i_mq_m(s)$$

の延長を

$$G_1\colon\beta(T\times S)\setminus\beta(Z)\to S$$

と書く．また連続写像

$$(T\times S)\setminus((\{t_0\}\times S)\cup Z)\to S;\ (s,t_m)\mapsto i_{m-1}q_{m-1}(s)$$

の延長を

$$G_2\colon\beta(T\times S)\setminus\beta((\{t_0\}\times S)\cup Z)\to S$$

と書く．このとき

$$\mathbb{Z}[\beta(T\times S)]\twoheadrightarrow\mathbb{Z}[T\times S]\xrightarrow{G}\mathbb{Z}[T]\xrightarrow{g}\mathbb{Z}[S]$$

は G_1-G_2 と一致する．さて

$$\beta(T\times S)=(\beta(T\times S)\setminus\beta((\{t_0\}\times S)\cup Z))\amalg\beta(Z\setminus(\{t_0\}\times S))\amalg\beta((\{t_0\}\times S)\setminus Z)$$

と分解する（$(\{t_0\}\times S)\cap Z=\emptyset$ に注意せよ）．$\beta(T\times S)\setminus\beta((\{t_0\}\times S)\cup Z)$ 上では，$F_3=G_1$，$F_2=G_2$ となる．また $\beta(Z\setminus\{t_0\}\times S)$ 上では，$F_3=F_2$ であり，G_1，G_2 は定義されていない．また $\beta((\{t_0\}\times S)\setminus Z)$ 上では，$F_3=G_1$ であり，F_2，G_2 は定義されていない．以上より，射 $\mathbb{Z}[\beta(T\times S)]\to\mathbb{Z}[S]$ として $F_3-F_2=G_1-G_2$ が示された． □

次に $\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}$ の計算を行う．

定義 A.25. Condensed abelian group $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$ を $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ の部分群 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-n,n])$ と定義する．ここで，もちろん $\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-n,n])\subset\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ は部分群ではないが，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ をとることで加法について閉じるようになることに注意せよ．

同様に Condensed $\mathbb{R}$-module $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{R}$ を $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$-submodule $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}\cap[-n,n])$ と定義する．

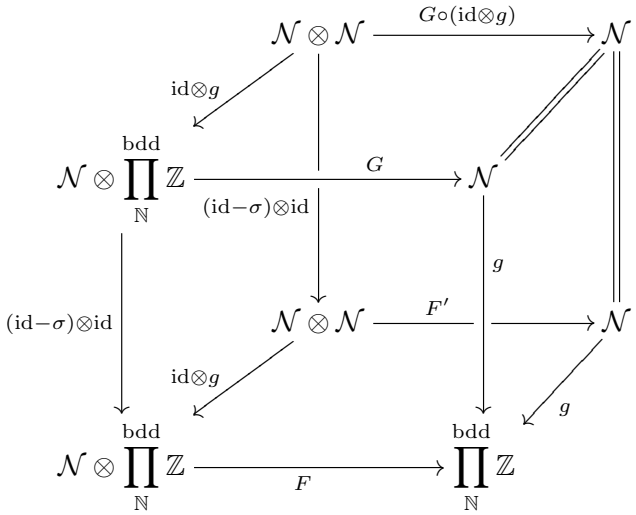
命題 A.26. $e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)\in\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-1,1])\subset\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$ を第 n 成分のみ 1 になる元とする．このとき $e_0,e_1,\dots,0$ は $\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-1,1])$ における収束数列を定めるので，対応して

$\underline{\mathbb{N}_\infty} \to \prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-1,1]) \subset \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$ を得る．これは $\{\infty\}\subset\mathbb{N}_\infty$ では 0 なので，$g\colon \mathcal{N}\to\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$ を得る．このとき，g の solid 化

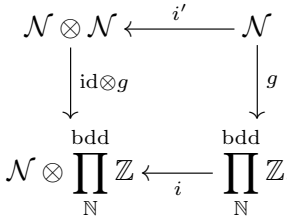
$$g^{\mathbb{L}\square}\colon \mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}\to\left(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\right)^{\mathbb{L}\square}$$

は同型である．

証明. 定理 A.24 と同様に，次の主張を示せば良い：可換図式



が存在する．さらに $F\colon \mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$，$F'\colon\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ は，それぞれ切断 (section) $i\colon \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\to\mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$，$i'\colon\mathcal{N}\to\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}$（つまり $F\circ i$，$F'\circ i'$ が恒等写像になる）を持ち，次の図式が可換になる：



構成すべきは F, F', G, i, i' の 5 つの射である．まず

$$F\colon \mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$$

から構成する．非負整数 n と数列 $(a_r)_r$ に対して，$\pi_n((a_r)_r)=(0,\dots,0,a_n,a_{n+1},\dots)$ と定める（つまり第 $n-1$ 成分までを 0 に置き換える）．また $\pi_\infty((a_r)_r)=0$ とする．すると，非負整数 m に対し，位相空間の連続写像

$$\mathbb{N}_\infty\times\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-m,m])\to\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-m,m]);\ (n,(a_r)_r)\mapsto\pi_n((a_r))$$

が定まる．対応する condensed set の射を考えて，m についての合併をとることで，condensed set の射

$$\underline{\mathbb{N}_\infty} \times \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z}$$

を得る．構成からこれは

$$\underline{\mathbb{N}_\infty} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z}, \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z})$$

を定める（$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(-,-)$ は condensed abelian group としての内部 Hom を指す）．また構成より，この射は $\{\infty\}$ では 0 になる．これより，

$$\mathcal{N} = \mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty]/\mathbb{Z}[\{\infty\}] \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z}, \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z})$$

を得る．ここから定まる射

$$F\colon \mathcal{N} \otimes \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z}$$

を F とする．

次に i を $\{0\} \to \mathbb{N}$ から誘導される自然な射

$$i\colon \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\{0\}] \otimes \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\mathbb{N}] \otimes \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} = \mathcal{N} \otimes \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z}$$

として定義する．これは F の切断になる．

次に $G\colon \mathcal{N} \otimes \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \to \mathcal{N}$ を定義する．非負整数 m をとる．このとき light locally profinite set の間の固有連続写像

$$\mathbb{N} \times \prod_{\mathbb{N}} (\mathbb{Z} \cap [-m, m]) \to \mathbb{N} \times (\mathbb{Z} \cap [-m, m]);\ (n, (a_r)_r) \mapsto (n, a_n)$$

を考える．これより，

$$\mathbb{Z}[\mathbb{N}] \otimes \mathbb{Z}\left[\prod_{\mathbb{N}} (\mathbb{Z} \cap [-m, m])\right] \to \mathbb{Z}[\mathbb{N}] \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \cap [-m, m]]$$

という射を得る．これに condensed set の自然な射

$$\underline{\prod_{\mathbb{N}} (\mathbb{Z} \cap [-m, m])} \to \mathbb{Z}\left[\prod_{\mathbb{N}} (\mathbb{Z} \cap [-m, m])\right]$$

と $- \times - \to - \otimes -$ を合成して，

$$\mathcal{N} \times \prod_{\mathbb{N}} (\mathbb{Z} \cap [-m, m]) \to \mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \cap [-m, m]]$$

を得る．さらに包含 $\mathbb{Z}\cap[-m,m]\hookrightarrow\mathbb{Z}$ から condensed abelian group の射 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}\cap[-m,m]]\to\mathbb{Z}$ を得る．これをさらに合成して，condensed set の射

$$\mathcal{N}\times\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-m,m])\to\mathcal{N}$$

を得る．こうしてできた condensed set の射を m についての合併をとることで，

$$\mathcal{N}\times\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\to\mathcal{N}$$

を得る．構成より，この射は双線型になるので，

$$G\colon\mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\to\mathcal{N}$$

が得られる．これを G と定義する．

次に F' を定義する．Light profinite set の連続写像

$$\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty\to\mathbb{N}_\infty;\ (n,m)\mapsto\begin{cases}m, & n\le m\text{ の場合（}m=n=\infty\text{ の場合もここに含める）}\\ \infty, & \text{その他}\end{cases}$$

を考える．この射による $(\{\infty\}\times\mathbb{N}_\infty)\cup(\mathbb{N}_\infty\times\{\infty\})$ の像は $\{\infty\}\subset\mathbb{N}_\infty$ となるので，condensed abelian group の射

$$F'\colon\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}\to\mathcal{N}$$

が誘導される．これを F' とおく．

最後に i' を，light locally profinite set の間の固有射 $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ m\mapsto(0,m)$ が誘導する condensed abelian group の射

$$i'\colon\mathcal{N}\to\mathcal{N}\times\mathcal{N}$$

と定義する．これは F' の切断になる．

このようにして作った射によってできる図式が可換になることを証明する．示すべきは次の三つの図式が可換になることである：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{N}\otimes\mathcal{N} & \xrightarrow{F'} & \mathcal{N}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes g} & & \downarrow{\scriptstyle g}\\ \mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z} & \xrightarrow{F} & \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z},\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z} & \xrightarrow{G} & \mathcal{N}\\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}-\sigma)\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle g}\\ \mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z} & \xrightarrow{F} & \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z},\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathcal{N}\otimes\mathcal{N} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} & \mathcal{N}\otimes\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}-\sigma)\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle G}\\ \mathcal{N}\otimes\mathcal{N} & \xrightarrow{F'} & \mathcal{N}.\end{array}$$

構成から直接示すこともできるが，ここでは別のやり方で証明する．まず一つ目から考える．二つの射 $g\circ F',F\circ(\mathrm{id}\otimes g)\colon\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}\to\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$ が一致することを見れば良い．全射 $\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty]\to$

$\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}$ と単射 $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ によって，始域を $\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty]$ に，終域を $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ に取り替えて良い．すると $\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty]$ の普遍性より，condensed set の二つの射

$$\underline{\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty}\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$$

が一致することを示すことに帰着される．ここで $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ は Hausdorff 位相空間から定まる condensed set なので，始域を $\underline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ を取り替えて良い．以上の帰着のもと，一つ目の図式の可換性は容易に従う．

二つ目も同様の帰着を行う．ここでは随伴によって対応する射

$$\underline{\mathbb{N}_\infty}\to\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty]\twoheadrightarrow\mathcal{N}\to\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z},\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})$$

を考える．すると，単射

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z},\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})\to\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cond(Set)}}(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z},\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})\cong\varprojlim_m\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cond(Set)}}(\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-m,m]),\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})$$

が存在し，例 1.9 より終域 $\varprojlim_m\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cond(Set)}}(\prod_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}\cap[-m,m]),\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})$ は第一可算的 Hausdorff 空間に付随する condensed set である．よって，やはり $\underline{\mathbb{N}_\infty}$ を $\underline{\mathbb{N}}$ に取り替えて良い．以上の帰着のもと，二つ目の図式の可換性も容易に従う．

次の命題 A.27 より $g\colon\mathcal{N}\to\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}}\mathbb{Z}$ が単射になる．このことから三つ目の図式の可換性も従う[*27]． □

命題 A.27. S を light profinite set として，$S=\varprojlim_{i\in\mathbb{N}}S_i$ と有限集合の極限で表す．ただし推移写像 $S_{i+1}\to S_i$ は全射とする．このとき自然な射 $\mathbb{Z}[S]\to\varprojlim_i\mathbb{Z}[S_i]$ は単射である．特に $S=\mathbb{N}_\infty$ とすると，$\mathbb{Z}[\mathbb{N}_\infty]\to\varprojlim_i\mathbb{Z}[\{0,1,\dots,i,\infty\}]$ は単射であり，両辺を $\mathbb{Z}[\{\infty\}]$ で割ることで，自然な射 $\mathcal{N}\to\varprojlim_i(\mathbb{Z}[\{0,1,\dots,i,\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}])\cong\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ も単射であることが分かる．

証明. $\mathbb{Z}[S]$ は前層 $T\mapsto\mathbb{Z}^{\oplus\underline{S}(T)}$ の層化である．さて $f=n_1[f_1]+\cdots+n_r[f_r]\in\mathbb{Z}^{\oplus\underline{S}(T)}$（ただし $n_i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，$f_1,\dots,f_r\in\underline{S}(T)$ は相異なる）であって，これらの $\varprojlim_i\mathbb{Z}[S_i](T)$ での像が 0 になるものをとる．このとき T の被覆 $\{T_m\to T\}_m$ であって f の $\mathbb{Z}^{\oplus\underline{S}(T_m)}$ への制限が 0 になるものが存在することを r についての帰納法で示す．まず $1\le i<j\le r$ に対し，$T_{ij}=\{t\in T\mid f_i(t)=f_j(t)\}\subset T$ と定義する．これは T の閉集合である．このとき $\bigcup_{i,j}T_{ij}=T$ となることを示そう．$t\notin\bigcup_{i,j}T_{ij}$ が存在したとする．このとき $f(t)=n_1[f_1(t)]+\ldots+n_r[f_r(t)]$

[*27] 命題 A.27 を使わずに，構成から直接確かめることもできるが，ここでは省略する．

の $\varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i]$ での像は 0 である．ここで仮定より $f_1(t), \ldots, f_r(t) \in S$ は相異なる．よって十分大きい i に対し，これらの S_i での像も相異なる．ここで $n_1[f_1(t)] + \ldots + n_r[f_r(t)]$ の $\mathbb{Z}[S_i]$ での像は 0 なので，$n_1 = \cdots = n_r = 0$ を得る．これは矛盾である．以上より，$\bigcup_{i,j} T_{ij} = T$ を得る．あとは T を $T_{i,j}$ に取り替えて $f_i = f_j$ とし，その部分を一つにまとめることで，帰納法の仮定を使うことができる． □

注意 A.28. $\varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i]$ の condensed abelian subgroup として $\mathbb{Z}[S]$ の具体的表記を与えることもできる．[Sch26a, Proposition 2.1] を見よ．

補題 A.29. Condensed set の射

$$[-1,1] \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R};\ (a,n) \mapsto a+n$$

は全射である．

証明. Light profinite set S と連続写像 $g\colon S \to \mathbb{R}$ をとる．これが $[-1,1] \times \mathbb{Z}$ に持ち上がることを示せば良い．S の開被覆 $\{g^{-1}((k-1,k+1))\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の開かつ閉集合による細分を取り，それを用いて局所定数関数 $h\colon S \to \mathbb{Z}$ を定めれば，$g-h\colon S \to \mathbb{R}$ は $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ を経由するので良い． □

命題 A.30. 自然な射 $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ は同型

$$\left(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z}\right)^{\mathbb{L}\square} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

を誘導する．

証明. まず命題 2.12 と solid module の直積が再び solid になる（定理 2.9）ことより，$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ は solid である．よって $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ の余核を C としたとき，$C^{\mathbb{L}\square} = 0$ を示せば良い．ここで C' を $\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{R} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ の余核とする．このとき次の完全列がある：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{R} & \longrightarrow & \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ここで $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ は単射である．また補題 A.29 より，$\mathrm{Coker}(\prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}}^{\mathrm{bdd}} \mathbb{R}) \to$

$\mathrm{Coker}(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{R})$ は同型である．以上より $C\cong C'$ を得る．ここで C' は (condensed) $\mathbb{R}$-module ゆえ，C もそうである．よって命題 2.15 より，$C^{\mathbb{L}\square}=0$ となる． □

以上二つの命題より直ちに次を得る．

系 A.31. 自然な同型 $\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}\cong\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ が存在する．

さらに次を得る．

系 A.32. 自然な写像

$$\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to R\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z},\mathbb{Z}),\quad \prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z},\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

は同型である．同様のことが $R\underline{\mathrm{Hom}}$ を $\underline{\mathrm{Hom}}$ に取り替えても成立する．

証明. $\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to R\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ が同型であることを示せば十分である[*28]．系 A.31，定理 A.22，命題 2.12 の証明より，

$$\begin{aligned}R\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z},\mathbb{Z})&\cong R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square},\mathbb{Z})\\&\cong R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N},\mathbb{Z})\\&\cong\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\end{aligned}$$

となる．この同型が，自然に定まる $\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\to R\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ と一致することも容易にわかる． □

定理 A.33. $S=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}S_n$ を light profinite set とする（各 S_n は有限集合）．このとき，$\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}\in\mathrm{Solid}$（つまり 0 次以外のコホモロジーは 0 になる）であり，さらに自然な射 $\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}\to\varprojlim_n\mathbb{Z}[S_n]$ は同型になる．

証明. S の位数が有限のときは良い．そうでないとき，非標準的な同型 $\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}\cong\mathcal{N}^{\mathbb{L}\square}\cong\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ が存在する．よって $\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}\in\mathrm{Solid}$ を得る．また系 A.32 より，標準的な同型

$$\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square}\cong\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square},\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

を得る．ここで例 1.9 より，$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square},\mathbb{Z})\cong\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S],\mathbb{Z})=C(S,\mathbb{Z})$ となる．ただし $C(S,\mathbb{Z})$ は S 上の $\mathbb{Z}$ に値を持つ関数のなす abel 群にコンパクト開位相（この場合は離散位相になる）を

[*28] 正確には，一つ目の射の同型から二つ目の射の同型を示すには，$\mathcal{D}(\mathrm{Cond(Ab)})$ における直積 $\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ が $\mathrm{Cond(Ab)}$ における直積と一致することを示さなければならない．これは関手 $\prod_{\mathbb{N}}-$ が t-exact なこと（容易に確かめられる）から従う．

入れたもので，さらにそれを condensed abelian group とみなしている．ここで $C(S,\mathbb{Z}) \cong \varinjlim_n C(S_n,\mathbb{Z})$ となる．よって

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(C(S,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) &\cong \underline{\mathrm{Hom}}(\varinjlim_n C(S_n,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \\ &\cong \varprojlim_n \underline{\mathrm{Hom}}(C(S_n,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \\ &\cong \varprojlim_n \mathbb{Z}[S_n]\end{aligned}$$

を得る．ただし最後の同型は S_n が有限集合であることから標準的に定まる．以上より，標準的な同型 $\mathbb{Z}[S]^{\mathbb{L}\square} \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}[S_n]$ を得る．この同型が定理中で与えた射と一致することは容易に分かる． □

謝辞

「代数的整数論とその周辺 2025」にて講演の機会を与えてくださった中村健太郎先生，大坪紀之先生， 関真一朗先生に感謝申し上げます．

参考文献

[ABLB+25] Johannes Anschütz, Guido Bosco, Arthur-César Le Bras, Juan Esteban Rodríguez Camargo, and Peter Scholze, *Analytic de Rham stacks of Fargues-Fontaine curves*, arXiv preprint arXiv: 2510.15196 (2025).

[And21] Grigory Andreychev, *Pseudocoherent and perfect complexes and vector bundles on analytic adic spaces*, arXiv preprint arXiv: 2105.12591 (2021).

[Ara25] *Notes-arakelov geometry and condensed mathematics*, `https://lebras.perso.math.cnrs.fr/Notes_workshop_all.pdf`, 2025.

[BCGP25] George Boxer, Frank Calegari, Toby Gee, and Vincent Pilloni, *Modularity theorems for abelian surfaces*, arXiv preprint arXiv: 2502.20645 (2025).

[Bos23a] Guido Bosco, *On the p-adic pro-étale cohomology of drinfeld symmetric spaces*, arXiv preprint arXiv: 2110.10683 (2023).

[Bos23b] Guido Bosco, *Rational p-adic hodge theory for rigid-analytic varieties*, arXiv preprint arXiv: 2306.06100 (2023).

[CN25] Pierre Colmez and Wiesława Nizioł, *Topological vector spaces*, arXiv preprint arXiv: 2509.25981 (2025).

[CS26] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Condensed mathematics and complex geometry*, arXiv preprint arXiv: 2605.11731 (2026).

[Eme17] Matthew Emerton, *Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **248** (2017), no. 1175, iv+158.

[Har66] Robin Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics, vol. No. 20, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966, Lecture notes of a seminar on the

work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64, With an appendix by P. Deligne.

[Hau26] Maximilian Hauck, *Rational analytic syntomic cohomology*, arXiv preprint arXiv: 2604.15193 (2026).

[Ked26] Kiran S. Kedlaya, *Notes on condensed mathematics*, `https://kskedlaya.org/papers/condensed.pdf`, 2026.

[Man22] Lucas Mann, *A p-adic 6-functor formalism in rigid-analytic geometry*, Ph.D. thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, August 2022, `https://hdl.handle.net/20.500.11811/10125`.

[Mik26] Yutaro Mikami, *Finiteness and duality of cohomology of* (φ, Γ)*-modules and the 6-functor formalism of locally analytic representations*, arXiv preprint arXiv: 2504.01780 (2026).

[RC26] Juan Esteban Rodríguez Camargo, *Notes on solid geometry*, arXiv preprint arXiv: 2603.03012 (2026).

[RJRC22] Joaquín Rodrigues Jacinto and Juan Esteban Rodríguez Camargo, *Solid locally analytic representations of p-adic Lie groups*, Represent. Theory **26** (2022), 962–1024.

[RJRC26] ———, *Solid locally analytic representations*, arXiv preprint arXiv: 2305.03162 (2026).

[Sch02] Peter Schneider, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Sch26a] Peter Scholze, *Lectures on analytic geometry*, arXiv preprint arXiv: 2605.03655 (2026).

[Sch26b] ———, *Lectures on condensed mathematics*, arXiv preprint arXiv: 2605.03658 (2026).

[Sch26c] Peter Scholze, *Six-functor formalisms*, arXiv preprint arXiv: 2510.26269 (2026).

[ST02] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum, *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 443–468.